

数学C 固有値と固有ベクトル ( )年( )組( )番( )

固有値

n 次の正方行列 A に対して、 $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ 、 $\vec{x} \neq \vec{0}$  となる定数  $\lambda$  と n 次の列ベクトル  $\vec{x}$  が存在するとき、 $\lambda$  を ( )、 $\vec{x}$  を  $\lambda$  に対する固有ベクトルという。

固有値を求めるには、 $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$  の両辺に単位行列 E を掛けて移項して、 $(A - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$  より、 $\det(A - \lambda E) = 0$  になる。

$\det$  は行列式 determinant の略である。2 次の正方行列では  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  である。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値を求める。 $(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$  より

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \times 2 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$  になる。

この方程式を固有方程式といい、固有方程式を解くと、 $\lambda =$  ( ) になる。

$\lambda =$  ( ) のとき、 $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x - 4y = 0)$  より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda =$  ( ) のとき、 $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x + y = 0)$  より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ただし、t は 0 でない任意の実数である。

$ax = by$  の一般解は  $x = bt, y = at$  (t は 0 でない任意の実数)

問題 A  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

対角化

n 次の正方行列 A が異なる n 個の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  をもち、これに対応する固有ベクトル  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  をもつとき、列ベクトルを束にした行列を P とすると、

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  となる。この行列は対角成分が ( ) になり、対角成分以外が ( ) になり、( ) 行列という。

この対角行列を求めることを ( ) という。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  を対角化する。

$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$  より

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = 0$

よって、 $\lambda =$  ( )

$\lambda =$  ( ) のとき、 $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x - y = 0)$  より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda =$  ( ) のとき、 $(A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x + y = 0)$  より  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ただし、t は 0 でない任意の実数である。P は t を除き

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 B  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  の n 乗を求めよ。