

数学C こ ゆ う ち か だい
固有値 課題

1. 次の行列の固有値を求めなさい。

Find the eigenvalues of the following matrix.

れい だい 例題	もん だい 問題
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\det(xI - A) = 0 \text{ より}$ $\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ $(x-3)(x+2) + 4 = 0$ $x^2 - x - 2 = 0$ $(x-2)(x+1) = 0$ $x = 2, -1$ <p>こ ゆう ち 固有値は 2, -1</p>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. 次の行列の固有ベクトルを求めなさい。

Find the eigenvectors of the following matrix.

れい だい 例題	もん だい 問題
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ <p>こ ゆう ち 固有値 2, -1</p> <p>$x = 2$ のとき</p> $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$x + 4y = 0$</p> <p>こ ゆう 固有ベクトルは</p> $s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \text{ は } 0 \text{ でない}$ <p>じっすう 実数</p> <p>$x = -1$ のとき</p> $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>$x + y = 0$</p> <p>こ ゆう 固有ベクトルは</p> $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \text{ は } 0 \text{ でない}$ <p>じっすう 実数</p>	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ <p>こ ゆう ち 固有値 2, 1</p>

)年()組()番()

3. 次の行列 A^n を求めなさい。

Find the following matrix A^n .

例題 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

① P^{-1} を求めよ。

$$\det P = 4 \times (-1) - 1 \times (-1) = -3$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

② $P^{-1}AP$ を求めよ。

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

③ A^n を求めよ。

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP \quad \text{より} \quad A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+2} - (-1)^n & 4(2^n - (-1)^n) \\ -2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + 4(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

もん だい 問題	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
①	P^{-1} をもとを求めよ。
②	$P^{-1}AP$ をもとを求めよ。
③	A^n をもとを求めよ。