

数学C 1次変換

対称移動

座標平面上の点 $P(2, 1)$ に対して、対称な点を求める。

x 軸に関して対称な点は $A(\quad)$ になる。

y 軸に関して対称な点は (\quad) になる。

原点に関して対称な点は (\quad) になる。

座標平面上の点 (x, y) に対して、対称な点 (x', y') を求める。

x 軸に関して対称な点は (\quad) であるから、 $(x' = \quad, y' = \quad)$ になる。

$\begin{cases} x' = \quad \times x + \quad \times y \\ y' = \quad \times x + \quad \times y \end{cases}$, よって、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表せる。

したがって、点 (x, y) を x 軸に関して対称に移動した点は (\quad) で求められる。

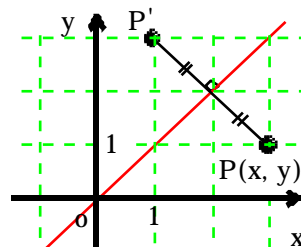
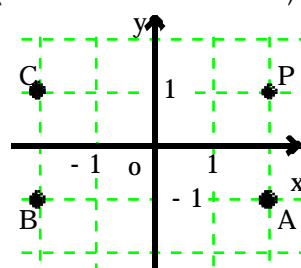
問題 A 点 $(1, -2)$ を x 軸に関して対称に移動した点を行列によって求めよ。

問題 B 点 (x, y) を次のように対称移動した点を (x', y') とする。この移動を行列で表せ。

(1) y 軸に関して対称

(2) 原点に関して対称

問題 C 点 $P(x, y)$ を $y = x$ に関して対称移動した点を $P'(x', y')$ とする。この移動を行列で表せ。



1次変換

座標平面上の点 $P(x, y)$ から、同じ平面上の点 $P'(x', y')$ への移動を考える。

この移動を変換といい、記号 f などを用いて $f : (x, y) \rightarrow (x', y')$ と表す。

また、点 $P'(x', y')$ を変換 f による点 $P(x, y)$ の像という。

変換 f が $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ のように定数項のない x, y の一次式で表されるとき、

この変換 f を (\quad) という。

行列を用いて表すと $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ になる。行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をこの1次変換 f を表す行列という。

問題 D 次の行列による1次変換で、与えられた点の像を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 点 $(1, 2)$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 点 $(3, -2)$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 点 $(4, 5)$
恒等変換 相似変換

合成変換

1次変換 f, g の表す行列を A, B とする。

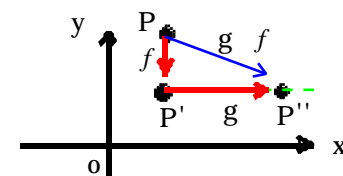
f によって点 $P(x, y)$ が、点 $P'(x', y')$ に移り、

さらに g によって、点 $P''(x'', y'')$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって、行列 BA は、 $P(x, y)$ を点 $P''(x'', y'')$ に移す1次変換になる。

この変換を、 f と g の (\quad) といい、 (\quad) で表す。



逆変換

1次変換 f によって点 $P(x, y)$ が、点 $P'(x', y')$ に移るとき、 f を表す行列 A が

逆行列 A^{-1} をもてば、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\quad) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ になる。

この行列 A は、点 $P'(x', y')$ を点 $P(x, y)$ に移す1次変換になり、 f の (\quad)

といい、 (\quad) で表す。

数学C 回転移動 ()年()組()番()

回転移動

座標平面上で、点 $P(x, y)$ を原点を中心として角 θ 回転した点 $P'(x', y')$ を求める。

$OP = r$ とし、動径 OP と x 軸のなす角を θ とすると、点 P は $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と表すことができる。

OP' と x 軸のなす角は $(\theta + \alpha)$ だから、点 P' は $(x' = r \cos(\theta + \alpha)$, $y' = r \sin(\theta + \alpha))$ と表すことができる。ここで、三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\theta + \alpha) = r (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ y' &= r \sin(\theta + \alpha) = r (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

点 $(2, 4)$ を原点を中心に 30° 回転した点の座標を求める。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

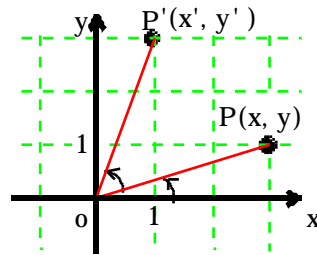
回転移動と逆変換

原点の周りに角 θ 回転する 1 次変換 f に対して、逆変換 f^{-1} は原点の周りに角 $-\theta$ 回転する 1 次変換である。よって、逆変換 f^{-1} を表す行列は下になる。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

問題 A 原点を中心とする回転移動で、次の角の回転移動を表す行列を求めよ。

- (1) 120° (2) -45°



原点を中心とした 90° の回転移動によって、点 $(-1, 2)$ に移されるもとの点 P の座標 (x, y) を求める。

$$90^\circ \text{ の回転移動を表す行列は } \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より、左から逆行列をかけて}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって、点 P の座標は $(2, -1)$ である。

この移動の逆を考えれば、原点を中心とする -90° の移動によって、点 $(-1, 2)$ は点 P に移る。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

角 θ の回転移動を表す行列の逆行列と、角 $-\theta$ の回転移動を表す行列は一致する。

直線と1次変換 (授業では扱わない)

直線 $2x - y - 1 = 0$ 上の点 P が、1 次変換によって、どのように移されるかを調べる。

この直線を媒介変数表示すると、 $x = t$, $y = 2t - 1$ と表すことができる。

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f を調べる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t - 2 \\ 3t - 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$x' = 4t - 2$, $y' = 3t - 1$ より、 t を消去して、 $3x' - 4y' - 2 = 0$

したがって、 $3x - 4y - 2 = 0$ 上に移される。

行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f を調べる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ より、点 } (1, 2) \text{ に移される。}$$

逆行列もたない 1 次変換では、直線が点や、原点を通る直線に移される。