数学C　連立1次方程式　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

連立一次方程式

連立一次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ を行列を用いて表すことを考える。

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ との積は $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ になり，$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ と等しくなる。

したがって，$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ と表すことができる。

一般に，連立一次方程式 $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ は，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

とすると，(　　　　)と表される。行列 A をこの連立一次方程式の係数行列という。

係数行列が逆行列をもつ場合

連立一次方程式 $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ は $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ と表される。

($\varDelta = \quad \times \quad - \quad \times \quad = \quad \neq 0$)であるから，係数行列は逆行列をもつ。

$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ の両辺に，左から $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}$ をかける。

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \frac{\quad}{\quad}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

したがって，($x = \qquad , \ y = \qquad$)

一般に，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ のとき，$\varDelta = ad - bc \neq 0$ ならば，

逆行列 A^{-1} が存在し，方程式　$AX = P$ の解は，$X = A^{-1}P$　になる。

問題 A　連立一次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$ を行列を用いて解きなさい。

係数行列が逆行列をもたない場合

連立一次方程式 $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ は $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ と表される。

($\varDelta = ad - bc = \qquad$)となり，係数行列は逆行列をもたない。

$x + 2y = 1$ の両辺を 3 倍すると，$3x + 6y = 3$ に一致する。

したがって，$x + 2y = 1$ を満たす解は，すべて $3x + 6y = 3$ を満たす。

よって，この連立一次方程式の解は無数にある。

連立一次方程式 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases}$ は $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ と表される。

($\varDelta = ad - bc = \qquad$)となり，係数行列は逆行列をもたない。

$x - 2y = 1$ の両辺を 3 倍すると，$3x - 6y = 3$ になる。$3x - 6y = 3$ と $3x - 6y = 6$ を同時に満たす解は存在しない。よって，この連立一次方程式の解はない。

一般に，連立一次方程式の係数行列が逆行列を持たないとき，連立一次方程式の解は 無数にある または ない である。

問題 B　次の連立一次方程式の解は「無数にある」「ない」のどちらであるか答えよ。

(1) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ 3x - 6y = 8 \end{cases}$　　(1) $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

問題 C　a が定数のとき，連立一次方程式 $\begin{cases} ax + \ \ y = 1 \\ 9x + ay = 3 \end{cases}$ を行列を用いて解きなさい。