

数学C 逆行列 ()年()組()番()

逆行列

0でない実数 a に対して、 $ab = 1$ となる数 b を a の逆数といい、 a^{-1} と表す。
正行行列 A と単位行行列 E に対して、 $AB = BA = E$ となる行行列 B を A の()と
いい、()と表す。

2次の正行行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 $AB = E$ となる $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、 x, y, z, w について、次の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} ax + by = \cdots \\ cx + dy = \cdots \end{cases} \quad \begin{cases} az + bw = \cdots \\ cz + dw = \cdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \begin{aligned} & \times d - \times b \text{より} \quad (ad - bc)x = \cdots \\ & \times a - \times c \text{より} \quad (ad - bc)y = \cdots \end{aligned} \\ & \begin{aligned} & \times d - \times b \text{より} \quad (ad - bc)z = \cdots \\ & \times a - \times c \text{より} \quad (ad - bc)w = \cdots \end{aligned} \end{aligned}$$

(i) $ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{\quad}{ad - bc}, \quad y = \frac{\quad}{ad - bc}, \quad z = \frac{\quad}{ad - bc}, \quad w = \frac{\quad}{ad - bc}$$

$$\text{したがって、} B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \text{となる。}$$

このとき、 $BA = E$ を満たす。よって、 $B = A^{-1}$ である。

(ii) $ad - bc = 0$ のとき

$$\quad, \quad, \quad, \quad \text{より} \quad a = b = c = d = \quad \text{になる。}$$

これは、 \quad, \quad に反する。したがって、 A の逆行行列は存在しない。

2次の正行行列について、次のことがなりたつ。

2次の正行行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 $\quad = ad - bc$ とおく。

$$0 \text{のとき、} A^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \quad \text{は determinant の略}$$

$= 0$ のとき、 A の逆行行列は存在しない。

問題A 次の行行列について、逆行行列があれば、それを求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

問題B 行行列 A, B が逆行行列 A^{-1}, B^{-1} をもつとき、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ。

$$\text{結合法則により、} \quad (AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = E$$

$$(AB)B^{-1}A^{-1} =$$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) =$$

$$\text{よって、} (AB)^{-1} =$$

行行列の方程式

$AX = B$ を満たす行行列 X を求めるには、両辺に左から A^{-1} をかける。

$$\text{左辺は} (A^{-1}AX = \quad), \text{右辺は} A^{-1}B, \text{したがって} (X = \quad)$$

問題C 行行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、 $AX = B$, $YA = B$ となる行行列

X, Y を求めよ。