

数学C 行列の積 ()年()組()番()

行列の実数倍

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の各成分を2倍した行列 $\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix}$ を $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ と表す。

kが実数のとき, 行列Aのすべての成分をk倍して得られる行列を $\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ と表す。

kを実数とするとき, $k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

実数倍の定義から, 次のことが成り立つ。

$(1) A = \quad, (-1)A = \quad, 0A = \quad, kO = \quad$

行列A, Bが同じ型で, h, kが実数のとき,

$(h(kA)) = (\quad)A, (h+k)A = \quad, k(A+B) = \quad$

同じ型の行列では, 加法, 減法, 実数倍の計算は文字式と同じように計算できる。

問題 A $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の計算をせよ。

- (1) $A - B$ (2) $2(A - B)$

- (3) $2A$ (4) $-2B$ (5) $2A - 2B$

問題 B $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, $2(X - A) = -B$ となる行列Xを求めよ。

行列の乗法

次の表は, あるクラブのユニフォームの単価(千円)と

注文数をまとめたものである。

(千円)	男	女
シャツ	6	4
パンツ	3	3

Lサイズのシャツの購入費用を考える。

$6 \times \quad + 4 \times \quad = \quad$ (千円)

この例より, 表から数値を抜き出してみる。

シャツの単価は行ベクトル $\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$, 数量は列ベクトル $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ になる。

単価 \times 数量=購入費用であるから, 次のように考えることができる。

$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = 6 \times \quad + 4 \times \quad =$

この考え方より, 行ベクトル $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ の積を次のように定める。

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \quad$ m次の行ベクトルと列ベクトルの積も同様である。

Lサイズのパンツの購入費用も同様に考え, まとめて書くと次のようになる。

$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \times \quad + \quad \times \quad \\ \quad \times \quad + \quad \times \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

この考え方より, 2次の正方行列と2次の列ベクトルの積を次のように定める。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

LLサイズの購入費用も同様に考え, まとめて書くと次のようになる。

$\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \times \quad + \quad \times \quad & \quad \times \quad + \quad \times \quad \\ \quad \times \quad + \quad \times \quad & \quad \times \quad + \quad \times \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

この考え方より, 2次の正方行列と2次の正方行列の積を次のように定める。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

問題 C 次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

数学C 行列の積の性質 ()年()組()番()

一般の行列の積

A が $l \times m$ 行列, B が $m \times n$ 行列のとき, 積 AB は (i, j) 成分が A の第 i 行の行ベクトルと B の第 j 行の列ベクトルの積になるように定める。積 AB は $l \times n$ 行列になる。

行列 A の行数と行列 B の列数が異なる場合には, A と B の積は定めない。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

行列の乗法について, 次の計算法則が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{結合法則 } ((AB)C) &= , \text{ 分配法則 } ((A+B)C) = \\ (A(B+C)) &= \end{aligned}$$

乗法の交換法則

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき } AB = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \text{ になる。}$$

したがって, この行列 A, B では, $AB \neq BA$ である。

正方行列の乗法では, 交換法則は一般には成り立たない。

$AB = BA$ となる行列では, A と B は交換可能であるという。

問題 A $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ のとき, A と B が交換可能になるようにせよ。

単位行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のように対角線上の $(1, 1)$ 成分, $(2, 2)$ 成分, \dots , (n, n) 成分がすべて 1 で, 他の成分が 0 の正方行列を E と表す。

問題 B $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A と B が交換可能か調べよ。

行列の累乗

正方行列 A の積 AA を A^2 , AAA を A^3 , n 個の積を A^n と書く。

問題 B $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ。

(1) A^2 (2) A^3 (3) A^4

ケーリー・ハミルトンの定理

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ となる。

この定理を証明するために, $A^2 + (ad - bc)E = (a + d)A$ を示す。

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$(ad - bc)E = (ad - bc) \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$A^2 + (ad - bc)E = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d)A$$

問題 C 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^2, A^3 を求めよ。