

数学B 二項分布 ( )年( )組( )番( )

二項分布

1 個のサイコロを 3 回投げるように，同じ条件のもとで，同じ試行を繰り返して行うとき，これらの試行を( )という。

1 個のサイコロを 3 回投げるときに，3 の倍数の目が出る回数  $X$  を調べる。

1 回の試行で 3 の倍数の目が出る確率は( )，出ない確率は( )になる。

3 回の試行で 3 の倍数の目が  $r$  回出る確率は  $P(X=r) = ( )$  になる。

$P(X=1) =$	$P(X=0) =$
$P(X=2) =$	
$P(X=3) =$	

X	0	1	2	3	計
確率	—	—	—	—	1

一般に，1 回の試行で事象  $A$  の起こる確率を  $p$  とし，その余事象の確率を  $q = 1 - p$  とし，この試行を  $n$  回繰り返す反復試行において， $A$  が  $r$  回起こる確率は

$$P(X=r) = {}^nC_r \times p^r \times q^{n-r}$$

になる。このような確率分布を( )といい， $B(n, p)$  で表す。

Binomial distribution の頭文字

また，確率変数  $X$  は二項分布  $B(n, p)$  に従うという。

問題 A 袋の中に赤玉 3 個( )と白玉 1 個( )が入っている。1 個玉を取り出し色を確認して戻す操作を 4 回繰り返すとき，白玉を取り出す回数を  $X$  とする。 $X$  の確率分布を利用して，白玉が何回出る確率が最も大きいか調べよ。

X	0	1	2	3	4	計
確率	—	—	—	—	—	1

二項分布の平均

確率変数  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき， $X$  の平均  $E(X)$  を求める。

$$E(X) = \sum_{r=0}^n r P(X=r) = \sum_{r=1}^n r P(X=r) = \sum_{r=1}^n r \times ( )$$

$r = 0$  のとき， $r P(X=r) = 0$ ， $q = 1 - p$

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1)!}{r \times (r-1)! \{(n-1) - (r-1)\}!} = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$$
 より

$$E(X) = \sum_{r=1}^n r \times \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1} \times p^r \times q^{n-r} = n \sum_{r=1}^n {}^{n-1}C_{r-1} \times p^r \times q^{n-r}$$
$$= np \sum_{r=1}^n {}^{n-1}C_{r-1} \times p^{r-1} \times q^{n-r}$$

$j = n - 1$ ， $k = r - 1$  とし，二項定理  $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r \times a^{n-r} \times b^r$  より，

$$E(X) = np \sum_{k=0}^j {}^jC_k \times p^k \times q^{j+1-(k+1)} = np \sum_{k=0}^j {}^jC_k \times q^j \times p^k$$
$$= np (q + p)^j = ( ) \quad p + q = 1 \text{ より}$$

二項分布の分散

確率変数  $X$  が二項分布  $B(n, p)$  に従うとき， $X$  の分散  $V(X)$  を求める。

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E(X(X-1)) + E(X) - \{E(X)\}^2$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{r=0}^n r(r-1) {}^nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=2}^n r(r-1) {}^nC_r p^r q^{n-r}$$
$$= \sum_{r=2}^n r(r-1) \frac{n!}{r!(n-r)!} \times p^r \times q^{n-r} = \sum_{r=2}^n \frac{n!}{(r-2)!(n-r)!} \times p^r \times q^{n-r}$$
$$= \sum_{r=2}^n n(n-1) \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} \times p^2 \times p^{r-2} \times q^{n-r}$$
$$= n(n-1) p^2 \sum_{r=2}^n \frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!} \times p^{r-2} \times q^{n-r} = ( )$$

$$V(X) = ( ) + ( ) - ( )^2 = ( )$$

問題 B 袋の中に赤玉 4 個( )と白玉 2 個( )が入っている。1 個玉を取り出し色を確認して戻す操作を 100 回繰り返すとき，白玉を取り出す回数  $X$  の期待値と分散を求めよ。