

数学B 確率変数の分散と標準偏差 ()年()組()番()

確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X の分布が与えられ、平均が m のとき、

$$(x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + (x_3 - m)^2 p_3 + \dots + (x_n - m)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$$

を確率変数 X の () といい、() または $E(X)$ で表す。

分散は X の平均 m からの偏差の 2 乗 $(X - m)^2$ の平均であるから、次のように表す。

$$V(X) = E((X - m)^2) \quad V(X) \text{ の } V \text{ は variance の頭文字}$$

また、分散の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の () といい、() で表す。

は standard deviation の s に対応するギリシア文字のシグマ

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2mx_i + m^2) p_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^n m^2 p_i \\ &= E(x^2) - 2mE(x) + m^2 = E(x^2) - 2mE(x) + m^2 \end{aligned}$$

問題 A 次の確率変数の平均と分散を求めよ。

A	0	1	3	4	合計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

B	0	2	6	8	合計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

C	0	1	3	4	合計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

D	0	1	3	4	合計
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

確率変数 $aX+b$ の分散と標準偏差

確率変数 $aX+b$ の平均を考える。

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i+b) p(X=x_i) = \sum_{i=1}^n ax_i p(X=x_i) + \sum_{i=1}^n b p(X=x_i) \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i = (aE(X) + b) \end{aligned}$$

したがって、確率変数 X の平均を m とすると、 $E(aX+b) = (am + b)$ になる。

ここで、 X の一次式 $aX+b$ の分散と標準偏差を考える。

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b) - (am+b))^2 \\ &= E((aX - am)^2) = E(a^2(X - m)^2) \\ &= a^2 E((X - m)^2) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

$$\sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \sqrt{V(X)}$$

問題 B 1 個のサイコロを投げるときに出る目を X とするとき、 $X, 2X+1$ の平均、分散、標準偏差を求めよ。

独立な確率変数 $X+Y$ の分散

独立な確率変数 X, Y の分散を考える。

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - \{E(X+Y)\}^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - \{E(X)+E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2) - \{E(X)\}^2 - 2E(X)E(Y) - \{E(Y)\}^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 + E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= (E(X^2) - \{E(X)\}^2) + (E(Y^2) - \{E(Y)\}^2) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) \end{aligned}$$

問題 C 大小 2 個のサイコロを投げるときに出る目を X, Y とするとき、 $X+Y$ の分散と標準偏差を求めよ。