

数学B 確率変数と確率分布 ( )年( )組( )番( )

確率変数と確率分布

1 枚の硬貨を 3 回投げる試行について考える。表 (Head), 裏 (Tail)を H, T で表す。

結果は HHH,( ),( ),( ),( ),( ),( ),TTT になる。

表 が出る回数を X とすると, X の値は( , , , )のどれかになる。

X = 0 の確率は  ${}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\text{---}\right)$

X = 1 の確率は

X = 2 の確率は

X = 3 の確率は

X	0	1	2	3	けい計
確率	---	---	---	---	1

一般に, 試行の結果によってその値が定まる変数 X を( )という。

確率変数 X がとる値  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  とそれらの値をとる確率  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  との対応の関係を X の( )または分布といい, 確率変数 X はこの分布に従うという。

$P(X = x_i)$  とすれば, 次が成り立つ。

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, \dots, p_n = 0$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

X	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	けい計
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	1

X が a 以上 b 以下 となる確率を  $P(a \leq X \leq b)$  と表す。

問題 A 1 個のサイコロを投げたときに出る目の数を X としたとき, 次の確率を求めよ。  
(1)  $P(X = 2)$  (2)  $P(3 \leq X \leq 5)$  (3)  $P(X^2 \leq 10)$

問題 B 袋の中に赤玉 3 個( )と白玉 2 個( )が入っている。同時に 2 個玉を取り出すとき, 取り出した白玉の個数 X の確率分布を求めよ。

X					けい計
確率	---	---	---	---	1

確率変数の平均

確率変数 X の確率分布が右の表のとき,

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

を確率変数 X の( )または期待値

といい,  $E(X)$  で表す。

X	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	けい計
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	1

$E(X)$  の E は expectation の頭文字

問題 C 問題 B の期待値を求めよ。

確率変数の  $aX+b$  の平均

確率変数 X の分布が与えられたとき,

a, b を定数とし,  $Y = aX+b$  となる確率

Y	$ax_1+b$	$ax_2+b$	$ax_3+b$	$\dots$	$ax_n+b$	けい計
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	1

変数を考える。Y の平均  $E(Y)$  は

$$E(Y) = E(aX+b) = (ax_1+b)p_1 + (ax_2+b)p_2 + (ax_3+b)p_3 + \dots + (ax_n+b)p_n$$
$$= \sum_{k=1}^n (ax_k+b)p_k = a \sum_{k=1}^n ( )p_k + b \sum_{k=1}^n ( ) =$$

確率変数 X に対して X の平均を m とするとき, 確率変数  $X - m$  を X の平均からの偏差という。

問題 D 偏差  $X - m$  の平均  $E(X - m)$  の値を求めよ。

問題 E  $E(X) = 2$  のとき, 次の確率変数の平均を求めよ。

(1)  $X + 2$  (2)  $-X$  (3)  $2X - 1$  (4)  $4X + 1$

確率変数の  $X^2$  の平均

確率変数 X を考えるとき,  $X^2$  も確率変数になる。  $E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$

問題 F サイコロを投げたときに出る目を X とするとき,  $E(X^2)$  を求めよ。

数学B 確率変数の和と積 ( )年( )組( )番( )

同時確率分布

確率変数 X,Y の確率を  $p(X = x_i)$  (  $i = 1, 2, \dots, m$  ) ,  $p(Y = y_j)$  (  $j = 1, 2, \dots, n$  ) とするとき ,

$X = x_i$  かつ  $Y = y_j$  となる確率を ( )といい ,  $p(X = x_i, Y = y_j)$  で表す。

このとき ,  $p(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p(X = x_i, Y = y_j)$  ,  $p(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p(X = x_i, Y = y_j)$  になる。

確率変数 X,Y の分布を同時に考えた表を ( )という。

X \ Y	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$	計
$x_1$	$p(X = 1, Y = 1)$	$p(X = 1, Y = 2)$	$\dots$	$p(X = 1, Y = y_n)$	$p(X = 1)$
$x_2$	$p(X = 2, Y = 1)$	$p(X = 2, Y = 2)$	$\dots$	$p(X = 2, Y = y_n)$	$p(X = 2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_m$	$p(X = x_m, Y = 1)$	$p(X = x_m, Y = 2)$	$\dots$	$p(X = x_m, Y = y_n)$	$p(X = x_m)$
計	$p(Y = 1)$	$p(Y = 2)$	$\dots$	$p(Y = y_n)$	1

問題 A 箱 A には , 赤玉 3 個と白玉 1 個 , 箱 B には , 赤玉 1 個と白玉 3 個が入っている。

それぞれの箱から 1 個ずつ玉を取り出す。箱 A から取り出した赤玉の個数を X , 箱 B から取り出した赤玉の個数を X , Y とするとき , 次の表を作成せよ。

X \ Y	0	1	計
0			
1			
計			

X + Y	0	1	2	計
確率				

X×Y	0	1	計
確率			

問題 B 袋に赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている。A が 1 個玉を取り出し , 戻さずに B が 1 個玉を取り出す。A が取り出した赤玉の数を X , B が取り出した赤玉の数を Y とするとき , X と Y の同時確率分布を求めよ。

X \ Y	0	1	計
0			
1			
計			

確率変数 X+Y の平均

確率変数 X,Y のそれぞれの平均が分かっているときに ,  $X+Y$  の平均を考える。

$x_i, y_j$  をそれぞれの確率変数がとる値とすると

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i,j} (x_i+y_j) p(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{i,j} x_i p(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i,j} y_j p(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_i x_i p(X = x_i, Y = y_j) + \sum_j y_j p(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_i x_i p(X = x_i) + \sum_j y_j p(Y = y_j) = ( ) \end{aligned}$$

問題 C  $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$  を示せ。

独立な確率変数 X×Y の平均

独立な確率変数 X,Y のそれぞれの平均が分かっているときに ,  $X \times Y$  の平均を考える。

$x_i, y_j$  をそれぞれの確率変数がとる値とし ,  $(x_i, y_j)$  に対して , 2 つの事象  $\{X = x_i\}, \{Y = y_j\}$  が同時に起こる確率は  $p(X = x_i, Y = y_j) = ( )$  となる。

$$\begin{aligned} E(X \times Y) &= \sum_{i,j} (x_i \times y_j) p(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} (x_i \times y_j) p( ) p( ) \\ &= ( \sum_i x_i p( ) ) ( \sum_j y_j p( ) ) = ( ) \end{aligned}$$

問題 D 問題 A の確率分布において ,  $E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$  の値を求めよ。