数学B　ベクトルと空間図形 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

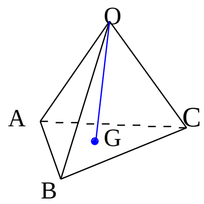
1．正四面体 OABC において，次のことを証明せよ。

Prove the following for the regular tetrahedron OABC.

例題

△ABC の重心を G とするとき，

OG ⊥ BC を証明せよ。



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，

$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$　とする。

点 G は△ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c}\right)$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$，$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角度は 60°であり，

$|\vec{b}| = |\vec{c}|$ であるから

$$\left(\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{c} &= |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}\right)$$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{c}$

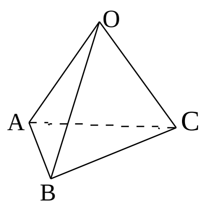
よって　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ であり，$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{BC}$

したがって OG ⊥ BC になる。　Q.E.D

問題

正四面体 OABC において

OA ⊥ BC を証明せよ。

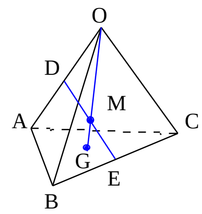


2．ベクトルを利用して，次のことを証明せよ。

Prove the following using vectors.

例題

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB の中点を E，線分 DE の中点を M，△ABC の重心を G とする。3点 O，M，G が一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$　とする。

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$　より，

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$

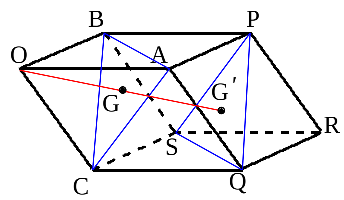
$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM}$$

よって，3点 O，M，G は一直線上にある。Q.E.D

問題

平行六面体 OAPB−CQRS において△ABC の重心を G，△PQS の重心を G′とする。3点 O, G, G′ が一直線上にあることを証明せよ。



数学B　ベクトルと空間図形２ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1.　3点 A, B, C の定める平面 ABC 上に点 P があるとき，z の値を定めよ。

例題

A(0 , 1 , 1) , B(1 , 2 , 3) , C(−2 , 0 , 2), P(3 , 3 , z)

点 P は平面 ABC 上にあるので

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と表すことができる。

$(3, 2, z-1) = s(1, 1, 2) + t(-2, -1, 1)$

$= (s-2t, s-t, 2s+t)$

よって，$3 = s-2t$, $2 = s-t$ を解き

$$\begin{array}{rl} & 3 = s - 2t \\ -) & 2 = s - t \\ \hline & 1 = -t \end{array} \qquad \begin{array}{l} t = -1 \text{ を代入して} \\ 2 = s - (-1) \\ s = 1 \end{array}$$

$s = 1$, $t = -1$ になる。

$z - 1 = 2s + t$ に代入して

$z - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$　∴　$z = 2$

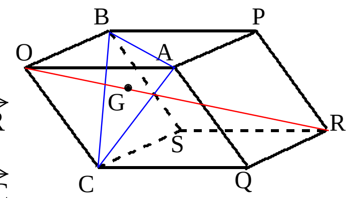
問題

A(2 , 1 , 0) , B(2 , 2 , 2) , C(1 , 0 , −3), P(4 , 3 , z)

2．ベクトルを利用して，次のことを証明せよ。

例題

平行六面体 OAPB−CQRS において△ABC の重心を G とする。点 G が対角線 OR を 1：2 に内分することを証明せよ。



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR}$

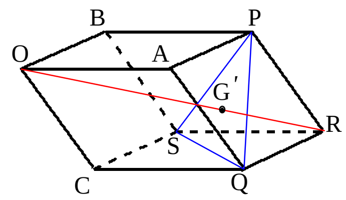
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OR}$

よって，点 G が対角線 OR を 1：2 に内分する。

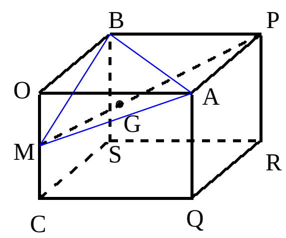
問題①

平行六面体 OAPB−CQRS において，△PQS の重心を G′とする。点 O, G′, R が一直線上にあることを証明せよ。



問題②

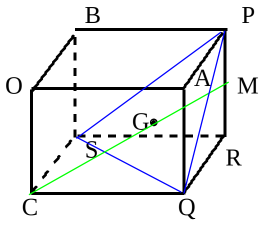
直方体 OAPB−CQRS において，OC の中点を M，△ABM の重心を G とする。点 G が線分 PM 上にあることを証明せよ。



数学B　ベクトルと空間図形 3 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　直方体 OAPB−CQRS において，
PR の中点を M，△PQS の重心を G とする。
点 G が線分 CM 上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，
$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BS} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS}}{3}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \vec{c}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}\right) - \vec{c}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$$

したがって，点 G は線分 CM 上にある。

Q.E.D

問題　直方体 OAPB−CQRS において，
PAC の中点を M，△PQC の重心を G とする。
点 G が線分 MR 上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，
$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。