

数学B ベクトルと空間図形 ()年()組()番()

位置ベクトル

空間上で点Oを基準とし、任意の点Pに対してベクトル $\vec{p} = \vec{OP}$ がただ一つ定まる。

\vec{p} を点Oを基準とする点Pの()という。

また、点Pの位置ベクトルが \vec{p} であることを $P(\vec{p})$ と表す。

平面上の場合と同様に、次のことが成り立つ。

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して
 $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトルは
 $\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

特に中点の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に外分する点Pの位置ベクトルは
 $\vec{p} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする ABC の重心Gの位置ベクトルは
 $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

問題A 四面体OABCの辺OA, AB, BC, OCの中点を、それぞれK, L, M, Nとする。
四角形KLMNが平行四辺形であることを示せ。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とすると、
 $\vec{OK} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{OL} = \frac{1}{2}\vec{b}$
 $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c}$
 $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$
 $\vec{NM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$
 $\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ であるから、四角形KLMNが平行四辺形である。 Q.E.D

直線上の点

平面上のベクトルと同様に空間のベクトルでも3点A, B, Pが直線AB上にある場合

$\vec{AP} = k\vec{AB}$ となる実数kが存在する。 $\vec{AP} = k\vec{AB}$ となる実数kが存在するとき、点P

Pは2点A, Bを通る直線上にある。

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\vec{a} = k\vec{b}$ になり、 $\vec{a} = k\vec{b}$ ならば $\vec{a} \parallel \vec{b}$ になる。

問題B OA, OB, OCを3辺とする平行六面体OAPB-CQDRにおいて、ABCの重心

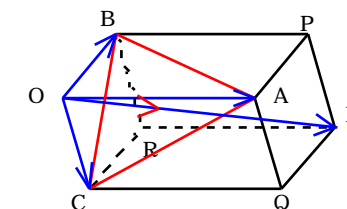
Gは線分OD上にあることを示せ。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とすると、

$$\vec{OD} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

よって $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OD}$ したがって、点Gは線分OD上にある。



内積の利用

平面上のベクトルと同様に空間のベクトルでも内積の性質は成り立つ。

問題C 正四面体OABCにおいて、OA ⊥ BC をベクトルを用いて証明せよ。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とすると、

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$

よって、 $\vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0$ であり、 $\vec{OA} \perp \vec{BC}$ となる。

したがって、OA ⊥ BC になる。

Q.E.D

