

1. 正四面体 OABC において、次のことを証明せよ。
Prove the following for the regular tetrahedron OABC.

2. ベクトルを利用して、次のことを証明せよ。
Prove the following using vectors.

例題

△ABC の重心を G とするとき、
OG ⊥ BC を証明せよ。

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$,
 $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。

点 G は △ABC の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$
$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$
$$\vec{OG} \cdot \vec{BC} = \left(\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$
$$= \frac{1}{3} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} \right)$$

\vec{a} と \vec{b} , \vec{a} と \vec{c} のなす角度は 60° であり、
 $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ であるから

$$\left(\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 60^\circ \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \right)$$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c}$

よって $\vec{OG} \cdot \vec{BC} = 0$ であり、 $\vec{OG} \perp \vec{BC}$

したがって OG ⊥ BC になる。 Q.E.D

問題

正四面体 OABC において
OA ⊥ BC を証明せよ。

例題

四面体 OABC において、辺 OA の
中点を D、辺 OB の中点を E、
線分 DE の中点を M、△ABC の
重心を G とする。3点 O、M、G
が一直線上にあることを証明
せよ。

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。

$\vec{OD} = \frac{1}{2} \vec{a}$, $\vec{OE} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$ より、

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OD} + \frac{1}{2} \vec{OE}$$
$$= \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c}$$
$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{4}{3} \vec{OM}$$

よって、3点 O、M、G は一直線上にある。 Q.E.D

問題

平行六面体 OAPB-CQRS において△ABC の重心を G、
△PQS の重心を G' とする。3点 O、G、G' が一直線上
にあることを証明せよ。

1. 3点 A, B, C の定める平面 ABC 上に点 P があるとき、
z の値を定めよ。
Point P is on plane ABC defined by three points A, B, and C.
Determine the value of z.

例題

$A(0, 1, 1), B(1, 2, 3), C(-2, 0, 2), P(3, 3, z)$

点 P は平面 ABC 上にあるので

$\vec{AP} = s \vec{AB} + t \vec{AC}$ と表すことができる。

$(3, 2, z - 1) = s(1, 1, 2) + t(-2, -1, 1)$

$= (s - 2t, s - t, 2s + t)$

よって、 $3 = s - 2t, 2 = s - t$ を解き

$\left(\begin{array}{cc} 3 = s - 2t & t = -1 \\ - \quad 2 = s - t & 2 = s - (-1) \\ \hline 1 = -t & s = 1 \end{array} \right)$

$s = 1, t = -1$ になる。

$z - 1 = 2s + t$ に代入して

$z - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \quad \therefore \underline{\underline{z = 2}}$

問題

$A(2, 1, 0), B(2, 2, 2), C(1, 0, -3), P(4, 3, z)$

2. ベクトルを利用して、次のことを証明せよ。
Prove the following using vectors.

例題

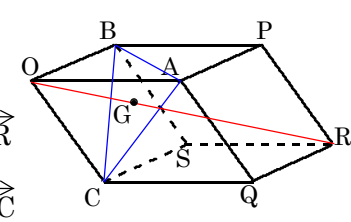
平行六面体 OAPB-CQRS において△ABC の重心を G とする。点 G が対角線 OR を 1 : 2 に内分することを証明せよ。

$\vec{OR} = \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PR}$

$= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

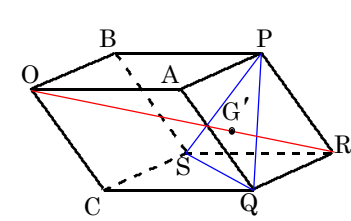
$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} = \frac{1}{3} \vec{OR}$

よって、点 G が対角線 OR を 1 : 2 に内分する。



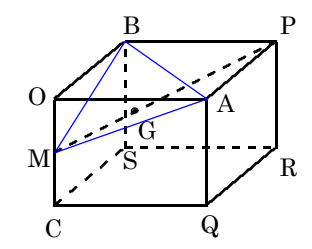
問題①

平行六面体 OAPB-CQRS において、△PQS の重心を G' とする。点 O, G', R が一直線上にあることを証明せよ。

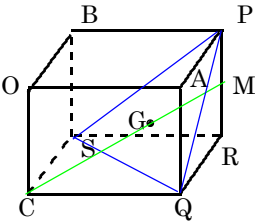


問題②

直方体 OAPB-CQRS において、OC の中点を M, △ABM の重心を G とする。点 G が線分 PM 上にあることを証明せよ。



例題 直方体 OAPB-CQRS において、
PR の中点を M、△PQS の重心を G とする。
点 G が線分 CM 上にあることを証明せよ。
In the rectangular solid OAPB-CQRS, let M be the midpoint of PR
and G be the center of gravity of △ PQS.
Prove that point G is on the line segment CM.



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$
 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + -\overrightarrow{PM}$
 $= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BS} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS}}{3}$
 $= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
 $= \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c})$

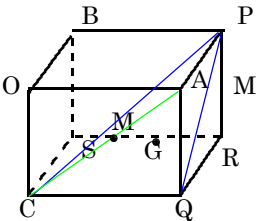
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$
 $= (\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) - \vec{c}$
 $= \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$
 $= \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) - \vec{c}$
 $= \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c})$
 $= \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$

したがって、点 G は線分 CM 上にある。

Q.E.D

問題 直方体 OAPB-CQRS において、
AC の中点を M、△PQC の重心を G とする。
点 G が線分 MR 上にあることを証明せよ。
In the rectangular solid OAPB-CQRS, let M be the midpoint of AC
and G be the center of gravity of △ PQC.
Prove that point G is on the line segment MR.



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$
 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。