

数学B 空間のベクトルの内積 ( )年( )組( )番( )

ベクトルの成分

x 軸, y 軸, z 軸と向きが同じで, 大きさが1の

基本ベクトルを, それぞれ  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  とする。

$\vec{a} = \vec{OA}$  となる点  $A(a_1, a_2, a_3)$  をとる。

点 A を通り, 座標平面に平行な平面と x, y, z 軸

との交点を  $A_1, A_2, A_3$  とすると,

$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}$$

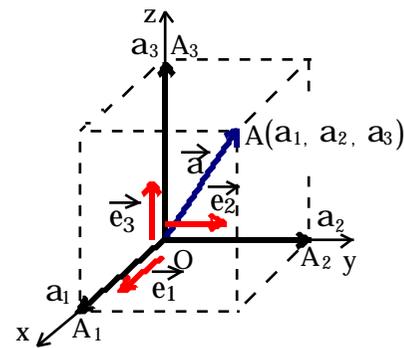
$$= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

したがって,  $\vec{a} = ( \quad )$  と表せる。

$a_1$  を x 成分,  $a_2$  を y 成分,  $a_3$  を z 成分という。

問題 A 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  を基本ベクトルで表示せよ。

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -1, 0)$$



成分による演算

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= \\ (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) &= \\ k(a_1, a_2, a_3) &= \end{aligned}$$

ベクトルの内積

平面と同様に,  $\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を とすれば, 内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \text{ただし, } 0^\circ \leq \theta < 180^\circ$$

と定義される。また,  $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  のとき,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  とする。

平面のベクトルの内積と同様に, 空間のベクトルの内積も成分で表すことができる。

内積と成分

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ のとき} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \end{aligned}$$

問題 C 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の内積を求めなさい。

- (1)  $\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (2, 1, 2)$       (2)  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -3, -1)$

空間の2つのベクトルが等しいときは, 成分もまた等しいときである。

等しいベクトル

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ のとき} \\ \vec{a} &= \vec{b} \quad a_1 = \quad, a_2 = \quad, a_3 = \quad \end{aligned}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  の大きさは有向線分 OA の大きさに等しい。

ベクトルの大きさ

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ のとき, } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

問題 B 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の大きさを求めなさい。

- (1)  $\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (2, 1, 2)$       (2)  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -3, -1)$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角が  $\theta$  のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \text{より, } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

問題 D 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

- (1)  $\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (2, 1, 2)$       (2)  $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -3, -1)$