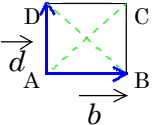


1. ベクトルを利用して、次のことを証明せよ。
Prove the following using vectors.

例題

平行四辺形 ABCD において、

AB = AD ならば、AC ⊥ BD



$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。
 $\overrightarrow{AC} = \vec{d} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{d} + \vec{b})(\vec{d} - \vec{b})$
 $= \vec{d} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= |\vec{d}|^2 - |\vec{b}|^2$

AB = AD であるから
 $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AD}|^2$, $|\vec{b}|^2 = |\vec{d}|^2$

よって、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

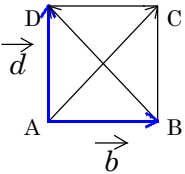
したがって、 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ になるから

AC ⊥ BD になる。 Q.E.D

問題

平行四辺形 ABCD において、

AC = DB ならば、AC ⊥ BD

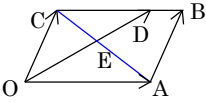


2. 平行四辺形 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき、 \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表し、3 点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

In parallelogram OABC, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.
Express the vector OD, OE using \vec{a} and \vec{b} .
Prove that the three points O, D, E are on the same straight line.

例題

CB を 3 : 1 に内分する点を D,
CA を 3 : 4 に内分する点を E



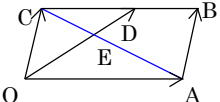
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$
 $= \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{4}$

$\overrightarrow{OE} = \frac{4\vec{c} + 3\vec{a}}{3 + 4} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{7}$
 $= \frac{4}{7} \times \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{4} = \frac{4}{7} \overrightarrow{OD}$

したがって、3 点 O, D, E は一直線上にある。 Q.E.D

問題

CB を 3 : 2 に内分する点を D,
CA を 3 : 5 に内分する点を E



1. 次の図形において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。 ※メネラウスの定理を参照
In the following figure, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Express \overrightarrow{OP} using \vec{a} , \vec{b} .

例題 辺 OA を 3 : 4 に内分する点 C, 辺 OB の中点を D, BC と AD の交点を P とする。
BP : PC = s : 1 - s とする。
 $\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OC} + (1 - s) \overrightarrow{OB}$
 $= s \times \frac{3}{7} \vec{a} + (1 - s) \vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$

(メネラウスの定理より)

$$\left(\frac{BD}{DO} \times \frac{OA}{AC} \times \frac{CP}{PB} = \frac{1}{1} \times \frac{7}{4} \times \frac{1-s}{s} = 1 \right)$$

$\frac{1-s}{s} = \frac{4}{7}$ より $s = \frac{7}{11}$

AP : PD = t : 1 - t とする。
 $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OD} + (1 - t) \overrightarrow{OA}$
 $= t \times \frac{1}{2} \vec{b} + (1 - t) \vec{a} \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で \vec{a}, \vec{b} が平行でないから
①, ②より $\frac{3}{7}s = 1 - t, \frac{1}{2}t = 1 - s$ を解き
 $s = \frac{7}{11}, 1 - s = \frac{4}{11}$ となり,
 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b}$ となる。

問題 辺 OA を 4 : 5 に内分する点 C, 辺 OB の中点を D, BC と AD の交点を P とする。

2. 平行四辺形 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき、 $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ を \vec{a}, \vec{c} を用いて表し、3点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

In parallelogram OABC, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.
Express $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ using \vec{a}, \vec{c} .
Prove that the three points O, D, and E are on a straight line.

例題

CB を 1 : 2 に内分する点 D, CA を 1 : 3 に内分する点 E

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$$= \vec{c} + \frac{1}{3} \vec{a} = \frac{\vec{a} + 3 \vec{c}}{3}$$

$\overrightarrow{OE} = \frac{3 \vec{c} + \vec{a}}{1 + 3} = \frac{\vec{a} + 3 \vec{c}}{4}$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{\vec{a} + 3 \vec{c}}{3} = \frac{3}{4} \overrightarrow{OD}$$

したがって、3点 O, D, E は一直線上にある。

Q.E.D

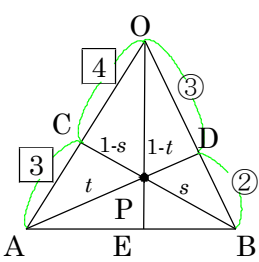
問題

CB を 2 : 3 に内分する点 D, CA を 2 : 5 に内分する点 E

1. 次の図形において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。 ※メネラウスの定理を参照
In the following figure, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Express \overrightarrow{OP} using \vec{a} , \vec{b} .

例題

辺 OA を 4 : 3 に内分する点を C,
辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D
AD と BC の交点を P とする。



BP : PC = s : 1 - s とする。
 $\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OC} + (1 - s) \overrightarrow{OB}$
 $= s \times \frac{4}{7} \vec{a} + (1 - s) \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$

AP : PD = t : 1 - t とする。
 $\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OD} + (1 - t) \overrightarrow{OA}$
 $= t \times \frac{3}{5} \vec{b} + (1 - t) \vec{a} \quad \dots \textcircled{2}$

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で \vec{a} , \vec{b} が平行でないから

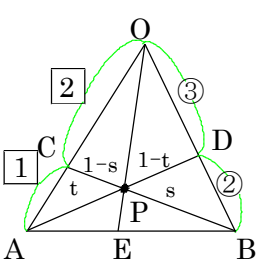
①, ②より $\frac{4}{7}s = 1 - t$, $\frac{3}{5}t = 1 - s$ を解き

$s = \frac{14}{23}$, $1 - s = \frac{9}{23}$ となり,

$\overrightarrow{OP} = \frac{8}{23} \vec{a} + \frac{9}{23} \vec{b}$ となる。

問題

辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C,
辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D
AD と BC の交点を P とする。

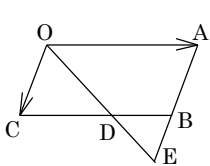


2. 平行四辺形 OABC において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき、 \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表し、3点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

In parallelogram OABC, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.
Express \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} using \vec{a} , \vec{c} .
Prove that the three points O, D, and E are on a straight line.

例題

CB を 3 : 2 に内分する点を D,
AB を 5 : 2 に外分する点を E



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$
 $= \vec{c} + \frac{3}{5} \vec{a} = \frac{3 \vec{a} + 5 \vec{c}}{5}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$
 $= \vec{a} + \frac{5}{3} \vec{c} = \frac{3 \vec{a} + 5 \vec{c}}{3} = \frac{5}{3} \overrightarrow{OD}$

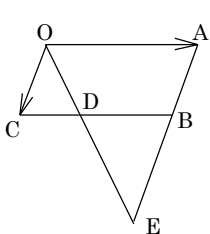
したがって、3点 O, D, E は一直線上にある。

Q.E.D

$\overrightarrow{OD} = \frac{2 \vec{c} + 3 \overrightarrow{OB}}{3 + 2} = \frac{2 \vec{c} + 3 (\vec{a} + \vec{c})}{5}$
 $= \frac{3 \vec{a} + 5 \vec{c}}{5}$
 $\overrightarrow{OE} = \frac{-2 \vec{a} + 5 \overrightarrow{OB}}{5 - 2} = \frac{-2 \vec{a} + 5 (\vec{a} + \vec{c})}{3}$
 $= \frac{3 \vec{a} + 5 \vec{c}}{3}$

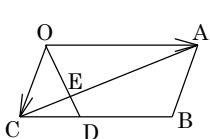
問題

① BC を 3 : 2 に内分する点を D,
AB を 5 : 3 に外分する点を E



問題

② BC を 3 : 2 に内分する点を D,
AC を 2 : 5 に内分する点を E



れいだいさんかっけいすいせん
例題①三角形の垂線

OA = 4, OB = 3, ∠AOB = 60°である△OABの頂点Oから辺ABに垂線OPを引く。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
点Pは直線BA上にあるので、実数tを用いて
 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a} + (1 - t)\vec{b}$ と表せる。
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB$
 $= \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$
BA ⊥ OPより、 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP}$
 $= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \{ t\vec{a} + (1 - t)\vec{b} \}$
 $= t|\vec{a}|^2 + (1 - 2t)\vec{a} \cdot \vec{b} + (t - 1)|\vec{b}|^2$
 $= t \times 4 + (1 - 2t) \times 6 + (t - 1) \times 3$
 $= -5t + 3 = 0 \quad \therefore t = \frac{3}{5}$
 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

れいだいさんかっけいかくとうぶんせん
例題②三角形の角の2等分線

OA = 4, OB = 3の△OABの∠AOBの2等分線と辺ABの交点をCとすると、 \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。
 $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}}{4}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB}}{3}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ になるように点E, F, Pをとると、
四角形OEPFはひし型になり、点PはOC上にある。
 $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OP} = k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{4} + \frac{\overrightarrow{OB}}{3}\right)$
点CはAB上にあるから $\frac{k}{4} + \frac{k}{3} = 1$
 $k = \frac{4 \times 3}{4 + 3} = \frac{12}{7}$ になり
 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OB}$ になる。
※点CはABを4:3に内分する。

もんだいさんかっけいすいせん
問題①三角形の垂線

OA = 5, OB = 8, ∠AOB = 60°である△OABの頂点Oから辺ABに垂線OPを引く。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

もんだいさんかっけいかくとうぶんせん
問題②三角形の角の2等分線

OA = 5, OB = 8の△OABの∠AOBの2等分線と辺ABの交点をCとすると、 \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。

れいだい
例題①

さんかつけい
三角形の垂心

すいしん
すいしん

OA = 4, OB = 2, ∠AOB = 60° である△OAB の垂心を H, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH} = s \vec{a} + t \vec{b}$ (s, t は実数) とすると

OA ⊥ BH より, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BH} &= \vec{a} \cdot (s \vec{a} + t \vec{b} - \vec{b}) \\ &= s |\vec{a}|^2 + (t - 1) \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 16s + 4(t - 1) = 0\end{aligned}$$

したがって $4s + t - 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$

OB ⊥ AH より, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AH} &= \vec{b} \cdot (s \vec{a} + t \vec{b} - \vec{a}) \\ &= (s - 1) \vec{a} \cdot \vec{b} + t |\vec{b}|^2 \\ &= 4(s - 1) + 4t = 0\end{aligned}$$

したがって $s + t - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$

①, ② より $s = 0, t = 1$ になり, $\overrightarrow{OH} = \vec{b}$

もんだい
問題①

すいしん
すいしん

OA = 4, OB = 6, ∠AOB = 60° である△OAB の垂心を H, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

れいだい
例題②

さんかつけい
三角形の角の2等分線

かく
かく

とうぶんせん
とうぶんせん

OA = 4, OB = 5 の△OAB の∠AOB の2等分線と辺 AB の交点を C とするとき, \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}}{4}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB}}{5}, \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$

なるように点 E, F, P をとると,
四角形 OEPF はひし型になり, 点 P は OC 上にある。

$$\overrightarrow{OC} = k \overrightarrow{OP} = k \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{4} + \frac{\overrightarrow{OB}}{5} \right)$$

点 C は AB 上にあるから $\frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 1$

$$k = \frac{4 \times 5}{4 + 5} = \frac{20}{9} \text{ になり}$$
$$\underline{\underline{\overrightarrow{OC} = \frac{5}{9} \overrightarrow{OA} + \frac{4}{9} \overrightarrow{OB} \text{ になる。}}}$$

※点 C は AB を 4 : 5 に内分する。

もんだい
問題②

とうぶんせん
とうぶんせん

OA = 6, OB = 8 の△OAB の∠AOB の2等分線と辺 AB の交点を C とするとき, \overrightarrow{OC} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。

れい だい
例題

AB = 4, AC = 2, ∠BAC = 60°である△ABCの外心を
O, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると、 \overrightarrow{AO} を \vec{b} , \vec{c}
を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \angle AOB$

$= 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

$\overrightarrow{AO} = s \vec{b} + t \vec{c}$ (s, t は実数) とする。

点 O は、△ABCの外接円の中心より

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$

$|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2 = |\overrightarrow{CO}|^2$

$|\overrightarrow{AO}|^2 = |s \vec{b} + t \vec{c}|^2$

$= s^2 |\vec{b}|^2 + 2 s t \vec{b} \cdot \vec{c} + t^2 |\vec{c}|^2$

$= 16 s^2 + 8 s t + 4 t^2 \qquad \cdots \textcircled{1}$

$|\overrightarrow{BO}|^2 = |\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}| = |s \vec{b} + t \vec{c} - \vec{b}|^2$

$= (s - 1)^2 |\vec{b}|^2 + 2 (s - 1) t \vec{b} \cdot \vec{c} + t^2 |\vec{c}|^2$

$= 16 s^2 + 8 s t + 4 t^2 - 32 s + 8 t + 16 \qquad \cdots \textcircled{2}$

$|\overrightarrow{CO}|^2 = |\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AC}| = |s \vec{b} + t \vec{c} - \vec{c}|^2$

$= s^2 |\vec{b}|^2 + 2 s (t - 1) \vec{b} \cdot \vec{c} + (t - 1)^2 |\vec{c}|^2$

$= 16 s^2 + 8 s t + 4 t^2 - 8 s - 8 t + 4 \qquad \cdots \textcircled{3}$

$|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{BO}|^2$ より

$- 32 s + 8 t + 16 = 0 \qquad \cdots \textcircled{4}$

$|\overrightarrow{AO}|^2 = |\overrightarrow{CO}|^2$ より

$- 8 s - 8 t + 4 = 0 \qquad \cdots \textcircled{5}$

④,⑤の連立方程式を解いて

$s = \frac{1}{2}, t = 0$

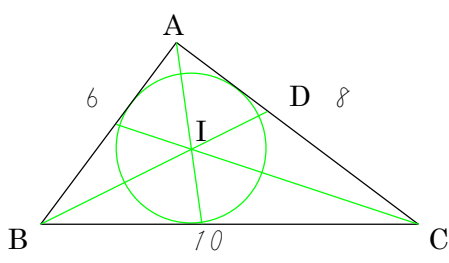
したがって $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \vec{b}$

もん だい
問題

AB = 3, AC = 2, ∠BAC = 60°である△ABCの外心を
O, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると、 \overrightarrow{AO} を \vec{b} , \vec{c}
を用いて表せ。

れい だい
例題

AB = 6, AC = 8, BC = 10 である△ABC の内心を I, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき, \overrightarrow{AI} を \vec{b} , \vec{c} を用いて表し, $|\overrightarrow{AI}|$ を求めよ。



∠B の2等分線と辺 AC との交点を D とする。

点 D は辺 AC を 6 : 10 に内分するので

$$AD = \frac{6}{6+10} \times 8 = 3 \qquad \overrightarrow{AD} = \frac{3}{8} \vec{c}$$

点 I は辺 BD を 6 : 3 に内分するので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{3 \overrightarrow{AB} + 6 \times \overrightarrow{AD}}{6+3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \vec{c} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c} \end{aligned}$$
$$|\overrightarrow{AI}|^2 = \left| \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c} \right|^2$$
$$= \frac{1}{9} |\vec{b}|^2 + \frac{1}{6} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{16} |\vec{c}|^2$$
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 8 \times 6} = 0$$
$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos A = 0$$

したがって

$$|\overrightarrow{AI}|^2 = \frac{1}{9} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{16} \times 8^2$$
$$= 4 + 0 + 4 = 8$$
$$|\overrightarrow{AI}| = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

もん だい
問題

AB = 5, AC = 8, BC = 7 である△ABC の内心を I, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき, \overrightarrow{AI} を \vec{b} , \vec{c} を用いて表し, $|\overrightarrow{AI}|$ を求めよ。



れいだい
例題

△ABCと点Pにおいて $\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき、点Pはどのような位置にあるか。
また、△PBC : △PCA : △PAB を求めよ。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{p}$ とする。

$\overrightarrow{p} + 2(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) + 3(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$

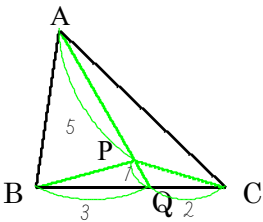
\overrightarrow{p} について整理すると、 $6\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$

よって $\overrightarrow{p} = \frac{2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{5}$

線分BCを3:2に内分する点をQとすると

$\overrightarrow{AQ} = \frac{2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{5}$ だから $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$

点Pは点Aと線分BCを3:2に内分する点Qを5:1に内分する点である。



△ABC の面積を1とすると、

BC : CQ = 5 : 2であるから

△ABC : △AQC = 5 : 2

よって △AQC の面積は $\frac{2}{5}$

AQ : PQ = 6 : 1であるから

△ABC : △PBC = 6 : 1

よって △PBC の面積は $\frac{1}{6}$

AQ : AP = 6 : 5であるから

△AQC : △APC = 6 : 5

よって △APC の面積は $\frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$

△PAB = △ABC - △APC - △PBC

$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

よって △PBC : △PCA : △PAB

$= \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 1 : 2 : 3$

もんだい
問題

△ABCと点Pにおいて $3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき、点Pはどのような位置にあるか。
また、△PBC : △PCA : △PAB を求めよ。

れいだい
例題

△OABの辺ABを2:1に内分する点をDとすると
 $2\text{OA}^2 + 4\text{OB}^2 = 3(2\text{OD}^2 + \text{AD}^2)$
が成り立つことを証明せよ。

$\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\text{OB}} = \vec{b}$ とする。

$$\overrightarrow{\text{OD}} = \frac{1 \times \vec{a} + 2 \times \vec{b}}{2 + 1} = \frac{\vec{a}}{3} + \frac{2\vec{b}}{3}$$
$$\overrightarrow{\text{AD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}} = \frac{2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3}$$
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{OD}}|^2 &= \left| \frac{\vec{a}}{3} + \frac{2\vec{b}}{3} \right|^2 \\ &= \frac{|\vec{a}|^2}{9} + \frac{4\vec{a} \cdot \vec{b}}{9} + \frac{4|\vec{b}|^2}{9} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{AD}}|^2 &= \left| \frac{2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3} \right|^2 \\ &= \frac{4|\vec{a}|^2}{9} - \frac{8\vec{a} \cdot \vec{b}}{9} + \frac{4|\vec{b}|^2}{9} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 3(2\text{OD}^2 + \text{AD}^2) &= 3(2|\overrightarrow{\text{OD}}|^2 + |\overrightarrow{\text{AD}}|^2) \\ &= \frac{2}{3}(|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) + \\ &\quad - \frac{1}{3}(4|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{3}(6|\vec{a}|^2 + 12|\vec{b}|^2) \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 2\text{OA}^2 + 4\text{OB}^2 \end{aligned}$$

よって、 $2\text{OA}^2 + 4\text{OB}^2 = 3(2\text{OD}^2 + \text{AD}^2)$

Q.E.D

もんだい
問題

△OABの辺ABを3:1に内分する点をDとすると
 $3\text{OA}^2 + \text{OB}^2 = 4(\text{OD}^2 + 3\text{BD}^2)$
が成り立つことを証明せよ。