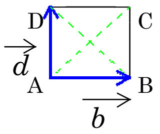
# 数学B　ベクトルと図形 課題　　( 　)年( 　)組( 　)番( 　　　　　　)

**1.** ベクトルを利用して，次のことを証明せよ。

**例題**

平行四辺形 ABCD において，

AB ＝ AD ならば，AC ⊥ BD




$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする。

$\overrightarrow{AC} = \vec{d} + \vec{b}$ ，　$\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\vec{d} + \vec{b}\right)\left(\vec{d} - \vec{b}\right)$$

$$= d \cdot d - b \cdot b$$

$$= |\vec{d}|^2 - |\vec{b}|^2$$

AB ＝ AD であるから

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2,\quad |\vec{b}|^2 = |\vec{d}|^2$$

よって，　$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

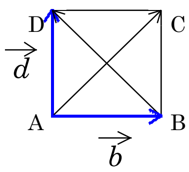
したがって，　$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ になるから

AC ⊥ BD　になる。　　　　　Q.E.D

**問題**

平行四辺形 ABCD において，

AC ＝ DB ならば，AC ⊥ BD

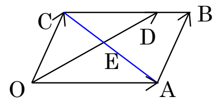



**2.** 平行四辺形 OABC において，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表し，3 点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

**例題**

CB を 3 : 1 に内分する点を D,

CA を 3 : 4 に内分する点を E




$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \vec{c} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{4\vec{c} + 3\vec{a}}{3+4} = \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{7}$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{3\vec{a} + 4\vec{c}}{4} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OD}$$

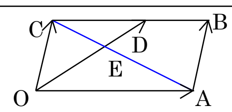
したがって，　3 点 O, D, E は一直線上にある。

Q.E.D

**問題**

CB を 3 : 2 に内分する点を D,

CA を 3 : 5 に内分する点を E

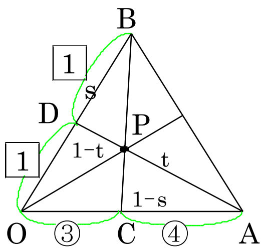


# 数学B　ベクトルと図形 2 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

**1.** 次の図形において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　※メネラウスの定理を参照

例題　辺 OA を 3 : 4 に内分する点を C，辺 OB の中点を D，BC と AD の交点を P とする。




BP : PC = s : 1 − s とする。

$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OC}+(1-s)\,\overrightarrow{OB}$

$=s\times\frac{3}{7}\vec{a}+(1-s)\,\vec{b}$　…①

（メネラウスの定理より

$\frac{BD}{DO}\times\frac{OA}{AC}\times\frac{CP}{PB}=\frac{1}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{1-s}{s}=1$

$\frac{1-s}{s}=\frac{4}{7}$ より　$s=\frac{7}{11}$ ）

AP : PD = t : 1 − t とする。

$\overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OD}+(1-t)\,\overrightarrow{OA}$

$=t\times\frac{1}{2}\vec{b}+(1-t)\,\vec{a}$　…②

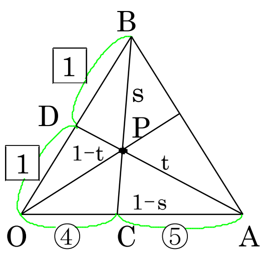
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないから

①, ②より $\frac{3}{7}s=1-t$，$\frac{1}{2}t=1-s$ を解き

$s=\frac{7}{11}$，$1-s=\frac{4}{11}$ となり，

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{11}\vec{a}+\frac{4}{11}\vec{b}$ となる。

問題　辺 OA を 4 : 5 に内分する点を C，辺 OB の中点を D，BC と AD の交点を P とする。

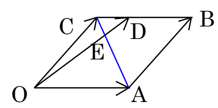



**2.** 平行四辺形 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表し，3 点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

例題

CB を 1 : 2 に内分する点を D，

CA を 1 : 3 に内分する点を E




$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$

$=\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{\vec{a}+3\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{OE}=\frac{3\vec{c}+\vec{a}}{1+3}=\frac{\vec{a}+3\vec{c}}{4}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{\vec{a}+3\vec{c}}{3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$

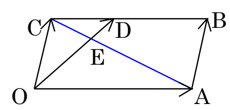
したがって，3 点 O, D, E は一直線上にある。

Q.E.D

問題

CB を 2 : 3 に内分する点を D，

CA を 2 : 5 に内分する点を E

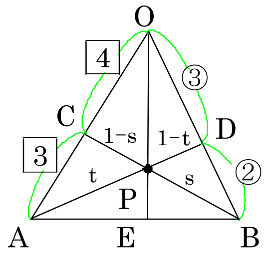


# 数学B　ベクトルと図形 3 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

**1.** 次の図形において，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　※メネラウスの定理を参照

**例題**

辺 OA を 4 : 3 に内分する点を C,
辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D
AD と BC の交点を P とする。




BP : PC ＝ s : 1 − s とする。

$\overrightarrow{OP} = s\,\overrightarrow{OC} + (1-s)\,\overrightarrow{OB}$

$= s \times \frac{4}{7}\vec{a} + (1-s)\,\vec{b}$　・・・①

AP : PD ＝ t : 1 − t とする。

$\overrightarrow{OP} = t\,\overrightarrow{OD} + (1-t)\,\overrightarrow{OA}$

$= t \times \frac{3}{5}\vec{b} + (1-t)\,\vec{a}$　・・・②

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないから

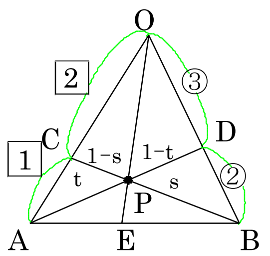
①, ②より $\frac{4}{7}s = 1 - t$ , $\frac{3}{5}t = 1 - s$ を解き

$s = \frac{14}{23}$，$1 - s = \frac{9}{23}$ となり，

$\overrightarrow{OP} = \frac{8}{23}\vec{a} + \frac{9}{23}\vec{b}$ となる。

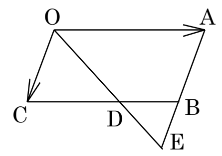
**問題**

辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C,
辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D
AD と BC の交点を P とする。




**2.** 平行四辺形 OABC において，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D, E を次のように定めたとき，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表し，3 点 O, D, E は一直線上にあることを証明せよ。

**例題**　CB を 3 : 2 に内分する点を D,
AB を 5 : 2 に外分する点を E




$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$= \vec{c} + \frac{3}{5}\vec{a} = \frac{3\vec{a} + 5\vec{c}}{5}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$= \vec{a} + \frac{5}{3}\vec{c} = \frac{3a + 5c}{3} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OD}$

したがって，3 点 O, D, E は一直線上にある。

Q.E.D

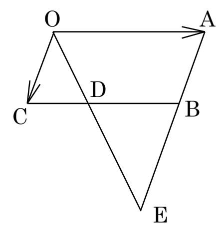
$\overrightarrow{OD} = \frac{2\vec{c} + 3\overrightarrow{OB}}{3+2} = \frac{2c + 3(\vec{a} + \vec{c})}{5}$

$= \frac{3\vec{a} + 3\vec{c}}{5}$

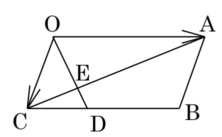
$\overrightarrow{OE} = \frac{-2\vec{a} + 5\overrightarrow{OB}}{5-2} = \frac{-2c + 5(\vec{a} + \vec{c})}{3}$

$= \frac{3\vec{a} + 5\vec{c}}{5}$

**問題 ①**　BC を 3 : 2 に内分する点を D,
AB を 5 : 3 に外分する点を E




**問題 ②**　BC を 3 : 2 に内分する点を D,
AC を 2 : 5 に内分する点を E



# 数学B　ベクトルと図形(垂線)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

## 例題①　三角形の垂線

$OA = 4, OB = 3, \angle AOB = 60^\circ$ である△OAB の頂点 O から辺 AB に垂線 OP を引く。
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

点 P は直線 BA 上にあるので, 実数 $t$ を用いて

$\overrightarrow{OP} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ と表せる。

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB$

$= \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 6$

$BA \perp OP$ より，$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP}$

$= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\}$

$= t|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a} \cdot \vec{b} + (t-1)|\vec{b}|^2$

$= t \times 4 + (1-2t) \times 6 + (t-1) \times 3$

$= -5t + 3 = 0 \qquad \therefore\ t = \dfrac{3}{5}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

## 例題②　三角形の角の 2 等分線

$OA = 4, OB = 3$ の△OAB の∠AOB の 2 等分線と辺 AB の交点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用い表せ。

$\overrightarrow{OE} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{4}$ ，$\overrightarrow{OF} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{3}$ ，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

になるように点 E, F, P をとると，

四角形 OEPF はひし型になり，点 P は OC 上にある。

$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OP} = k\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}}{4} + \dfrac{\overrightarrow{OB}}{3}\right)$

点 C は AB 上にあるから $\dfrac{k}{4} + \dfrac{k}{3} = 1$

$k = \dfrac{4 \times 3}{4+3} = \dfrac{12}{7}$ になり

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{OB}$ になる。

※点 C は AB を 4 : 3 に内分する。

## 問題①　三角形の垂線

$OA = 5, OB = 8, \angle AOB = 60^\circ$ である△OAB の頂点 O から辺 AB に垂線 OP を引く。
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

## 問題②　三角形の角の 2 等分線

$OA = 5, OB = 8$ の△OAB の∠AOB の 2 等分線と辺 AB の交点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用い表せ。

# 数学B　ベクトルと図形(垂心) 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

## 例題①　三角形の垂心

$OA=4,\ OB=2,\ \angle AOB=60^\circ$ である△OAB の垂心を H, $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$$
$$=4\times2\times\frac{1}{2}=4$$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ ($s, t$ は実数) とすると

$OA\perp BH$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=\vec{a}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})$$
$$=s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=16s+4(t-1)=0$$

したがって　$4s+t-1=0$ …①

$OB\perp AH$ より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AH}=\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})$$
$$=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$$
$$=4(s-1)+4t=0$$

したがって　$s+t-1=0$ …②

①, ② より $s=0,\ t=1$ になり，$\overrightarrow{OH}=\vec{b}$

## 問題①

$OA=4,\ OB=6,\ \angle AOB=60^\circ$ である△OAB の垂心を H, $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ を用いて表せ。

## 例題②　三角形の角の2等分線

$OA=4,\ OB=5$ の△OAB の∠AOB の2等分線と辺 AB の交点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}}{4},\quad \overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OB}}{5},\quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$$

になるように点 E, F, P をとると，
四角形 OEPF はひし型になり，点 P は OC 上にある。

$$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{4}+\frac{\overrightarrow{OB}}{5}\right)$$

点 C は AB 上にあるから $\frac{k}{4}+\frac{k}{5}=1$

$k=\frac{4\times5}{4+5}=\frac{20}{9}$ になり

$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$ になる。

※点 C は AB を 4 : 5 に内分する。

## 問題②

$OA=6,\ OB=8$ の△OAB の∠AOB の2等分線と辺 AB の交点を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

# 数学B　ベクトルと図形(外心)　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

**例題**

$AB=4$, $AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$ である△ABCの外心をO, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle AOB$$

$$=4\times 2\times\frac{1}{2}=4$$

$\overrightarrow{AO}=s\vec{b}+t\vec{c}$ ($s, t$ は実数) とする。

点Oは，△ABCの外接円の中心より

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$$

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2=|\overrightarrow{CO}|^2$$

$$|\overrightarrow{AO}|^2=|s\vec{b}+t\vec{c}|^2$$

$$=s^2|\vec{b}|^2+2st\,\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$$

$$=16s^2+8st+4t^2 \quad \cdots ①$$

$$|\overrightarrow{BO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}|=|s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b}|^2$$

$$=(s-1)^2|\vec{b}|^2+2(s-1)t\,\vec{b}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2$$

$$=16s^2+8st+4t^2-32s-8t+16 \quad \cdots ②$$

$$|\overrightarrow{CO}|^2=|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}|=|s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c}|^2$$

$$=s^2|\vec{b}|^2+2s(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+(t-1)^2|\vec{c}|^2$$

$$=16s^2+8st+4t^2-8s-8t+4 \quad \cdots ③$$

$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{BO}|^2$ より

$$-32s-8t+16=0 \quad \cdots ④$$

$|\overrightarrow{AO}|^2=|\overrightarrow{CO}|^2$ より

$$-8s-8t+4=0 \quad \cdots ⑤$$

④,⑤の連立方程式を解いて

$$s=\frac{1}{2},\ t=0$$

したがって　$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\vec{b}$

**問題**

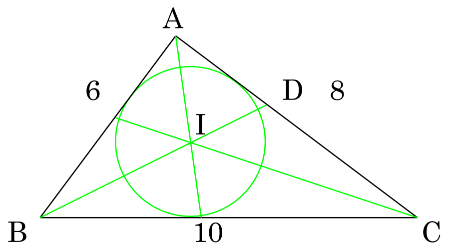
$AB=3$, $AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$ である△ABCの外心をO, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

# 数学B　ベクトルと図形(内心)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

## 例題

$\mathrm{AB} = 6, \mathrm{AC} = 8, \mathrm{BC} = 10$ である△ABC の内心を I, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し，$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}|$ を求めよ。




∠B の 2 等分線と辺 AC との交点を D とする。

点 D は辺 AC を 6 : 10 に内分するので

$$\mathrm{AD} = \frac{6}{6+10} \times 8 = 3 \qquad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3}{8}\vec{c}$$

点 I は辺 BD を 6 : 3 に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 6 \times \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6+3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}|^2 = \left|\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{1}{16}|\vec{c}|^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 8 \times 6} = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos A = 0$$

したがって

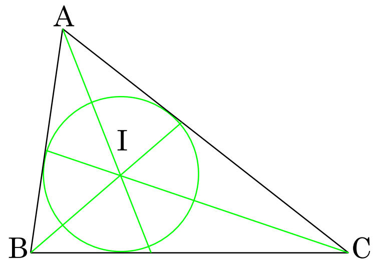
$$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}|^2 = \frac{1}{9} \times 6^2 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{16} \times 8^2$$

$$= 4 + 0 + 4 = 8$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

## 問題

$\mathrm{AB} = 5, \mathrm{AC} = 8, \mathrm{BC} = 7$ である△ABC の内心を I, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表し，$|\overrightarrow{\mathrm{AI}}|$ を求めよ。



# 数学B　ベクトルと図形(面積比)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

## 例題

△ABC と点 P において　$\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$

が成り立つとき，点 P はどのような位置にあるか。

また，△PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{p}$ とする。

$\overrightarrow{p}+2\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)+3\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{0}$

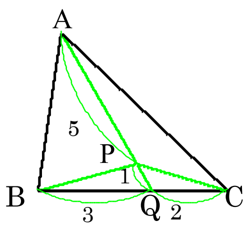
$\overrightarrow{p}$について整理すると，　$6\overrightarrow{p}=2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$

よって　$\overrightarrow{p}=\dfrac{2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}}{6}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}}{5}$

線分 BC を 3：2 に内分する点を Q とすると

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}}{5}$　だから　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$

点 P は点 A と線分 BC を 3：2 に内分する点 Q を 5：1 に内分する点である。




△ABC の面積を 1 とすると，

BC：CQ ＝ 5：2 であるから

△ABC：△AQC ＝ 5：2

よって　△AQC の面積は　$\dfrac{2}{5}$

AQ：PQ ＝ 6：1 であるから

△ABC：△PBC ＝ 6：1

よって　△PBC の面積は　$\dfrac{1}{6}$

AQ：AP ＝ 6：5 であるから

△AQC：△APC ＝ 6：5

よって　△APC の面積は　$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}$

△PAB＝△ABC－△APC－△PBC

$=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

よって　△PBC：△PCA：△PAB

$=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{2}=1:2:3$

## 問題

△ABC と点 P において $3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+5\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$

が成り立つとき，点 P はどのような位置にあるか。

また，△PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

# 数学B　ベクトルと図形（線分の2乗）課題　　（　）年（　）組（　）番（　）

**例題**

△OAB の辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D とすると

$2\,\mathrm{OA}^2 + 4\,\mathrm{OB}^2 = 3\left(2\,\mathrm{OD}^2 + \mathrm{AD}^2\right)$

が成り立つことを証明せよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1\times\vec{a} + 2\times\vec{b}}{2+1} = \frac{\vec{a}}{3} + \frac{2\vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2 = \left|\frac{\vec{a}}{3} + \frac{2\vec{b}}{3}\right|^2$$

$$= \frac{\left|\vec{a}\right|^2}{9} + \frac{4\vec{a}\cdot\vec{b}}{9} + \frac{4\left|\vec{b}\right|^2}{9}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2 = \left|\frac{2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a}}{3}\right|^2$$

$$= \frac{4\left|\vec{a}\right|^2}{9} - \frac{8\vec{a}\cdot\vec{b}}{9} + \frac{4\left|\vec{b}\right|^2}{9}$$

$$3\left(2\,\mathrm{OD}^2 + \mathrm{AD}^2\right) = 3\left(2\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2\right) +$$

$$\frac{1}{3}\left(4\left|\vec{a}\right|^2 + 8\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(6\left|\vec{a}\right|^2 + 12\left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$= 2\left|\vec{a}\right|^2 + 4\left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 2\,\mathrm{OA}^2 + 4\,\mathrm{OB}^2$$

よって，$2\,\mathrm{OA}^2 + 4\,\mathrm{OB}^2 = 3\left(2\,\mathrm{OD}^2 + \mathrm{AD}^2\right)$

Q.E.D

**問題**

△OAB の辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D とすると

$3\,\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = 4\left(\mathrm{OD}^2 + 3\,\mathrm{BD}^2\right)$

が成り立つことを証明せよ。