

# 数学B ベクトルと図形 ( )年( )組( )番( )

直線上の点

ベクトルを利用して、平面上の3点A, B, Pが直線AB上にあるか調べてみよう。  
2点A, Bを通る直線上に点Pがあると、ベクトルの実数倍の定義により  $\vec{AP} = k \vec{AB}$  となる実数kが存在する。 $\vec{AP} = k \vec{AB}$ となる実数kが存在するとき、点Pは2点A, Bを通る直線上にある。

問題A 平面上に異なる2点A, Bをとり、 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ とする。このとき、

$$\vec{OP} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$$

となる点Pが直線AB上にあることを示せ。

$$\vec{AP} = ( ) = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} - ( ) = ( )$$

$$\vec{AB} = ( ) = ( )$$

であるから

$$\vec{AP} = ( ) \vec{AB}$$

したがって、点Pが直線AB上にある。

ベクトルの分解

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき、平面上のベクトル $\vec{p}$ はただ一通りに表すことができる。このことをベクトルの( )という。

$$\vec{p} = s \vec{a} + t \vec{b} \quad (s, t \text{ は実数})$$

となることを証明する。

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{p} = \vec{OP}$$

とする。

点Pを通り、直線OA, OBに平行な直線が直線OA, OBと交わる点をC, Dとする。

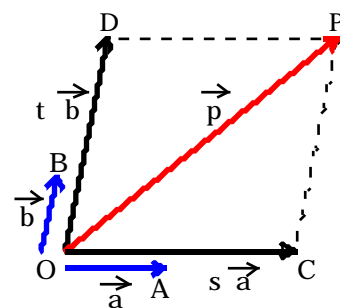
点Cは直線OA上、点Dは直線OB上にあるから、 $\vec{OC} = s \vec{OA}$ ,  $\vec{OD} = t \vec{OB}$

となる実数s, tがそれぞれ一つ定まる。

$$\text{よって、} \vec{OP} = s \vec{OA} + t \vec{OB}$$

$$\vec{p} = s \vec{a} + t \vec{b}$$

になる。



問題B  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、 $s \vec{a} + t \vec{b} = 3 \vec{a} - \vec{b}$ となる実数s, tを求めよ。

交点の位置ベクトル

点A, Bの位置ベクトルを $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ とするとき、直線AB上の点Pの位置ベクトルは

$$\vec{p} = s \vec{a} + (1 - s) \vec{b}$$

と表すことができる。

交点の位置ベクトル $\vec{OP}$ をs, tを使った2通りの式で表しても、 $\vec{p}$ は一通りの表し方しかないので、s, tの値が定まる。

問題C OABにおいて、辺OAの中点をC、辺OBを1:2に内分する点をDとする。線分ADと線分BCの交点をP、 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ とする。 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ で表せ。

$$AP : PD = s : (1 - s)$$

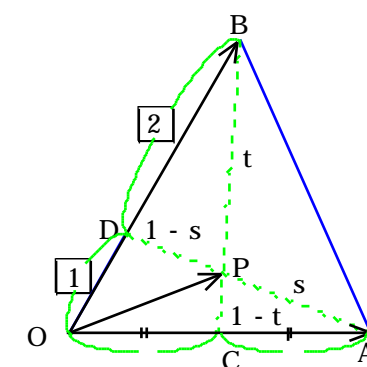
とすると

$$\vec{OP} = (1 - s) \vec{OA} + s \vec{OD} = (1 - s) \vec{a} + s \left( \frac{1}{3} \vec{b} \right) \dots$$

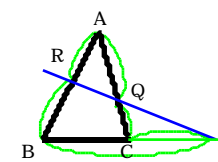
$$BP : PC = t : (1 - t)$$

とすると

$$\vec{OP} = (1 - t) \vec{OB} + t \vec{OC} = (1 - t) \vec{b} + t \left( \frac{1}{2} \vec{a} \right) \dots$$



発展問題D 上の図のOBCにメネラウスの定理を使い、 $\vec{OP}$ を $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ で表せ。



$$\frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} = 1$$