

数学B ベクトルの内積 ()年()組()番()

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} に対して, 点Oが始点になるように平行移動する。

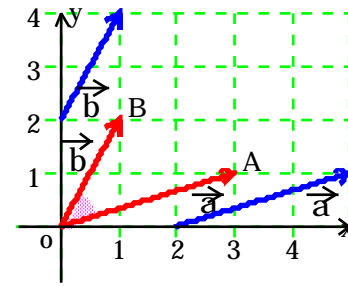
$\angle AOB$ = を \vec{a} と \vec{b} のなす角 という。

ただし, の範囲は 0° 180° である。

このとき, $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos$ を \vec{a} と \vec{b} の()

といい, 記号()で表す。

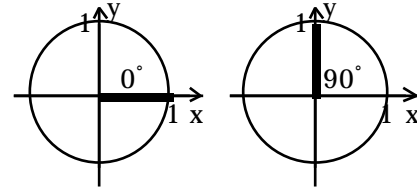
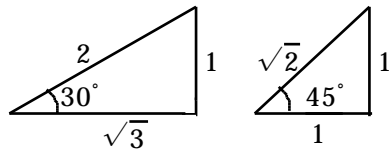
$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは, $\vec{a} \cdot \vec{b} = ()$ と定める。



\vec{a} と \vec{b} のなす角を とするとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ベクトルの内積

問題 A 図より, 次の値を読み取りなさい。

- (1) $\cos 30^\circ$ (2) $\cos 45^\circ$ (3) $\cos 60^\circ$ (4) $\cos 0^\circ$ (5) $\cos 90^\circ$

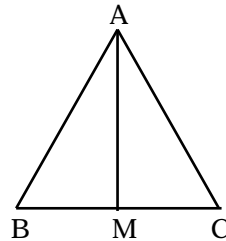


問題 B を \vec{a} と \vec{b} のなす角とするとき, \vec{a} と \vec{b} の内積を求めなさい。

- (1) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $= 60^\circ$ (1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $= 45^\circ$

問題 C 1 辺の長さが2である正三角形 ABC において, 辺 BC の中 点を M とするとき, 次の値を求めなさい。

- (1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (2) $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ (3) $\vec{AM} \cdot \vec{BC}$



内積と成分

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とし, そのなす角が のとき,

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求める。 $\angle AOB$ に余弦定理を用いる。

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \times OB \times \cos$ だから

$$OA \times OB \times \cos = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2)$$

ここで

$$OA^2 = |\vec{a}|^2 =$$

$$OB^2 = |\vec{b}|^2 =$$

$$AB^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 =$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \times OB \times \cos$$

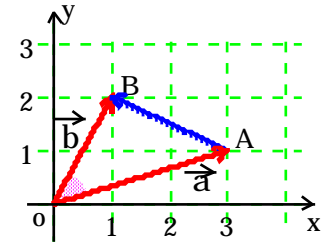
$$= \frac{1}{2} \{$$

$$\}$$

=

この式は $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも成り立つ。

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ 内積と成分



問題 D 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} の内積を求めなさい。

- (1) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 2)$ (2) $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角が のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = | | | | \text{ より, } \cos =$$

問題 E 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角 を求めなさい。

- (1) $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (1, 2)$ (2) $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$

数学B 内積の性質

()年()組()番()

内積の性質

ベクトルの内積について、次の性質が成り立つ。

内積の性質

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- (3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- (4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ただし、 k は実数とする

交換法則
分配法則

問題 A $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき、次の式を証明せよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{a} =$ $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$|\vec{a}|^2 =$ $\vec{b} \cdot \vec{a} =$

よって

よって

応用問題 B $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ を証明せよ。

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = () \cdot ()$
 $= () \cdot () + () \cdot ()$

$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

よって $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

問題 C $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ のとき、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ。

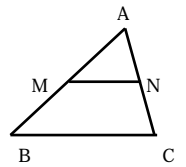
$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 =$

$|\vec{a} + \vec{b}| > 0$ より、 $|\vec{a} + \vec{b}| =$

ベクトルの平行

ABC において、辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とする。

このとき、中点連結定理より、 $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}BC$ となる。



したがって $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ となる。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が同じ向きか、反対の向きのとき、 \vec{a} と \vec{b} は () であるといい、記号 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ で表す。

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$ ベクトルの平行 k は実数

応用問題 D $\vec{a} = (1, 2)$ に平行で大きさが 5 であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを \vec{p} とすると、 $\vec{p} \parallel \vec{a}$ より、 $\vec{p} = k\vec{a} = (k, 2k)$

$|\vec{p}| = 5$ より、 $|\vec{p}|^2 = 25$ になる。

$|\vec{p}|^2 = k^2 + (2k)^2 = 5k^2 = 25$ $k = \pm 5$

よって、求めるベクトルは、 $(5, 10)$, $(-5, -10)$

ベクトルの垂直

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角が 90° のとき、 \vec{a} と \vec{b} は () であるといい、記号 $\vec{a} \perp \vec{b}$ で表す。

$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = 0$ になる。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき、 \vec{a} , \vec{b} のなす角を θ とすると、 $\cos \theta = 0$ より、 $\theta = 90^\circ$ になる。

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ベクトルの垂直

応用問題 E $\vec{a} = (2, 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{p} = (x, y)$ とすると、 $\vec{p} \cdot \vec{a} = 0$

したがって $y = -2x$

$|\vec{p}| = \sqrt{5}$ より、 $|\vec{p}|^2 = 5$

$x^2 + y^2 = 5$ を解き、求めるベクトルは、 $(1, -2)$, $(-1, 2)$