

1. \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} when the angle between them is θ .

例題	問題
① $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{3}$ $\theta = 30^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 30^\circ$ $= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$	① $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 30^\circ$
② $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 45^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 45^\circ$ $= 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2}}$	② $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 3$ $\theta = 45^\circ$
③ $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 1$ $\theta = 60^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 60^\circ$ $= 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$	③ $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{3}$ $\theta = 60^\circ$

2. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} .

例題	問題
① $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (-1, 3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times (-1) + 2 \times 3 = \underline{\underline{5}}$	① $\vec{a} = (1, 3)$ $\vec{b} = (4, 2)$
② $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (4, -2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times 4 + 2 \times (-2)$ $= \underline{\underline{0}}$	② $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (2, -1)$
③ $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ $\vec{b} = (3, 3\sqrt{3})$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times 3 + \sqrt{3} \times 3\sqrt{3}$ $= \underline{\underline{12}}$	③ $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (3, 6)$

3. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} のなす角 θ を求めよ。
Find the angle θ between the following vectors \vec{a} and \vec{b} .

例題
$\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, -3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 2 \times (-3) = -5$ $ \vec{a} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ $ \vec{b} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \underline{\underline{135^\circ}}$
問題
$\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (2, 1)$

4. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$ のとき、
次の値を求めよ。
Find the value of the following expression.

例題
$ \vec{a} - \vec{b} $ を求めよ。 $ \vec{a} - \vec{b} ^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ $= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} ^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} ^2$ $= 1^2 - 2 \times \frac{3}{2} + (\sqrt{3})^2 = 1$ $ \vec{a} - \vec{b} \geq 0$ であるから $ \vec{a} - \vec{b} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$
問題
$ \vec{a} + \vec{b} $ を求めよ。

1. \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} when the angle between them is θ .

例題	問題
① $ \vec{a} = 4, \vec{b} = \sqrt{3}$ $\theta = 30^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 30^\circ$ $= 4 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \underline{2\sqrt{3}}$	① $ \vec{a} = 1, \vec{b} = 2\sqrt{2}$ $\theta = 30^\circ$
② $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 45^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 45^\circ$ $= 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{2}$	② $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 4$ $\theta = 45^\circ$
③ $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 6$ $\theta = 60^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 60^\circ$ $= 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{3\sqrt{3}}$	③ $ \vec{a} = 4, \vec{b} = \sqrt{3}$ $\theta = 60^\circ$

2. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} .

例題	問題
① $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (3, 1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times 3 + 2 \times 1 = \underline{5}$	① $\vec{a} = (2, 4)$ $\vec{b} = (2, -6)$
② $\vec{a} = (1, 3)$ $\vec{b} = (6, -2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times 6 + 3 \times (-2)$ $= \underline{0}$	② $\vec{a} = (4, 2)$ $\vec{b} = (1, -2)$
③ $\vec{a} = (3, \sqrt{3})$ $\vec{b} = (-\sqrt{3}, 1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 3 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1$ $= \underline{-2\sqrt{3}}$	③ $\vec{a} = (1, 1)$ $\vec{b} = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

3. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} のなす角 θ を求めよ。
Find the angle θ between the following vectors \vec{a} and \vec{b} .

例題
$\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (4, 2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 4 + 3 \times 2 = 10$ $ \vec{a} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ $ \vec{b} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } = \frac{10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \underline{45^\circ}$
問題
$\vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (6, -4)$

4. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ のとき、
次の値を求めよ。
Find the value of the following expression.

例題
$ \vec{a} + \vec{b} $ を求めよ。 $ \vec{a} + \vec{b} ^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ $= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} ^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} ^2$ $= 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} + (\sqrt{2})^2 = 4$ $ \vec{a} + \vec{b} > 0$ であるから $ \vec{a} + \vec{b} = \sqrt{4} = \underline{2}$
問題
$ \vec{a} + 2\vec{b} $ を求めよ。

1. \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} when the angle between them is θ .

例題	問題
① $ \vec{a} = 4, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 90^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 90^\circ$ $= 4 \times \sqrt{2} \times 0 = \underline{\underline{0}}$	① $ \vec{a} = 4, \vec{b} = -2$ $\theta = 90^\circ$
② $ \vec{a} = 4, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 45^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 45^\circ$ $= 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{4}}$	② $ \vec{a} = 4, \vec{b} = 3$ $\theta = 45^\circ$
③ $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{2}$ $\theta = 60^\circ$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} \vec{b} \cos 60^\circ$ $= 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$	③ $ \vec{a} = 2, \vec{b} = \sqrt{3}$ $\theta = 60^\circ$

2. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} .

例題	問題
① $\vec{a} = (2, 1)$ $\vec{b} = (-1, 2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 2 \times (-1) + 1 \times 2 = \underline{\underline{0}}$	① $\vec{a} = (1, 3)$ $\vec{b} = (-3, 1)$
② $\vec{a} = (1, 4)$ $\vec{b} = (2, -1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 1 \times 2 + 4 \times (-1)$ $= \underline{\underline{-2}}$	② $\vec{a} = (1, 3)$ $\vec{b} = (4, -1)$
③ $\vec{a} = (3, \sqrt{3})$ $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $= 3 \times 1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ $= \underline{\underline{6}}$	③ $\vec{a} = (1, \sqrt{2})$ $\vec{b} = (-2, \sqrt{2})$

3. 次のベクトル \vec{a}, \vec{b} のなす角 θ を求めよ。
Find the angle θ between the following vectors \vec{a} and \vec{b} .

例題 $a = (4, 2), b = (1, -2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 1 + 2 \times (-2) = 0$ $ \vec{a} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ $ \vec{b} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} } = \frac{0}{\sqrt{20} \sqrt{5}} = 0$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \underline{\underline{90^\circ}}$	問題 $\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (6, 2)$
--	--

4. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
Find the inner product of \vec{a} and \vec{b} .

例題 $ \vec{a} - \vec{b} = 1$ $ \vec{a} - \vec{b} ^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ $= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$ $= \vec{a} ^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} ^2$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a} ^2 + \vec{b} ^2 - \vec{a} - \vec{b} ^2) \div 2$ $= (4 + 3 - 1) \div 2 = 3$	問題 $ \vec{a} + \vec{b} = 1$
---	------------------------------

1. 次のベクトル \vec{a} , \vec{b} のなす角 θ を求めよ。
Find the angle θ between the following vectors \vec{a} and \vec{b} .

例題 $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 4^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 3^2 \\ &= (2\sqrt{7})^2 = 28 \end{aligned}$$

よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-6}{4 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = \underline{\underline{120^\circ}}$

問題① $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{19}$

問題② $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} + 2\vec{b}| = 5$

2. $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。
Find the minimum value of $|\vec{a} + t\vec{b}|$ and the value of t at that time.

例題 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 1 = 2^2 \end{aligned}$$

よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= (\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 + 2t \times 1 + t^2 \times 1^2 \\ &= t^2 + 2t + 4 = (t + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = -1$ のとき 最小値 $\sqrt{3}$ になる。

問題 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{6}$

1. $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$ について答えよ。

Answer about $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$.

2. $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$ について答えよ。

Answer about $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$.

例題

$\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 2) \quad \vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$
(t は実数)のとき, $|\vec{c}|$ の最小値と t の値
を求めよ。そのとき, \vec{b} と \vec{c} は垂直であることを示せ。

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} + t \vec{b} = (3, 1) + t(1, 2) \\ &= (t + 3, 2t + 1) \\ |\vec{c}|^2 &= (t + 3)^2 + (2t + 1)^2 \\ &= 5t^2 + 10t + 10 = 5(t + 1)^2 + 5 \\ |\vec{c}|^2 &\text{は } t = -1 \text{ のとき, 最小値 } 5 \text{ になる。} \\ |\vec{c}| &\text{は } t = -1 \text{ のとき, 最小値 } \sqrt{5} \text{ になる。}\end{aligned}$$

このとき, $\vec{c} = (2, -1)$ になるから

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (1, 2) \cdot (2, -1) = 0 \text{ であるから}$$

$\vec{b} \cdot \vec{c}$ は垂直である。

問題

$\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 1) \quad \vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$
(t は実数)のとき, $|\vec{c}|$ の最小値と t の値
を求めよ。そのとき, \vec{b} と \vec{c} は垂直であることを示せ。

例題

$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} - \vec{b}| = 3,$
 $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$ (t は実数)とするととき,
 \vec{c} と \vec{b} が垂直のとき, t の値を求めよ。

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 5^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 = 3^2 \\ \text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} &= 16 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} &= (\vec{a} + t \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + t \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + t |\vec{b}|^2 \\ &= 16 - 16t = 0 \\ \text{よって, } t &= 1\end{aligned}$$

問題

$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} - \vec{b}| = 4,$
 $\vec{c} = \vec{a} + t \vec{b}$ (t は実数)とするととき,
 \vec{c} と \vec{b} が垂直のとき, t の値を求めよ。