数学B　ベクトルの内積　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ $\theta=30^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 30^\circ$ $=2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$	① $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=30^\circ$
② $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=45^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 45^\circ$ $=2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{2}}$	② $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=3$ $\theta=45^\circ$
③ $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=1$ $\theta=60^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 60^\circ$ $=2\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$	③ $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ $\theta=60^\circ$

2. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\vec{a}=(1,2)$ $\vec{b}=(-1,3)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times(-1)+2\times3=\underline{\underline{5}}$	① $\vec{a}=(1,3)$ $\vec{b}=(4,2)$
② $\vec{a}=(1,2)$ $\vec{b}=(4,-2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times4+2\times(-2)$ $=\underline{\underline{0}}$	② $\vec{a}=(1,2)$ $\vec{b}=(2,-1)$
③ $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$ $\vec{b}=(3,3\sqrt{3})$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times3+\sqrt{3}\times3\sqrt{3}$ $=\underline{\underline{12}}$	③ $\vec{a}=(1,2)$ $\vec{b}=(3,6)$

3. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題
$\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(1,-3)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=\underline{\underline{135^\circ}}$
問題
$\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(2,1)$

4. $\lvert\vec{a}\rvert=1$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$ のとき，次の値を求めよ。

例題　$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$ を求めよ。
$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ $=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\lvert\vec{b}\rvert^2$ $=1^2-2\times\dfrac{3}{2}+\left(\sqrt{3}\right)^2=1$ $\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert\geqq0$ であるから　$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$
問題　$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$ を求めよ。

数学B　ベクトルの内積 2　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\lvert\vec{a}\rvert=4$，$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ $\theta=30^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 30^\circ$ $=4\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\underline{\underline{2\sqrt{3}}}$	① $\lvert\vec{a}\rvert=1$，$\lvert\vec{b}\rvert=2\sqrt{2}$ $\theta=30^\circ$
② $\lvert\vec{a}\rvert=2$，$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=45^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 45^\circ$ $=2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{2}}$	② $\lvert\vec{a}\rvert=2$，$\lvert\vec{b}\rvert=4$ $\theta=45^\circ$
③ $\lvert\vec{a}\rvert=2$，$\lvert\vec{b}\rvert=6$ $\theta=60^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 60^\circ$ $=2\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{3\sqrt{3}}}$	③ $\lvert\vec{a}\rvert=4$，$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ $\theta=60^\circ$

2. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\vec{a}=(1,2)$ $\vec{b}=(3,1)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times 3+2\times 1=\underline{\underline{5}}$	① $\vec{a}=(2,\ 4)$ $\vec{b}=(2,-6)$
② $\vec{a}=(1,\ 3)$ $\vec{b}=(6,-2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times 6+3\times(-2)$ $=\underline{\underline{0}}$	② $\vec{a}=(4,\ 2)$ $\vec{b}=(1,-2)$
③ $\vec{a}=(3,\sqrt{3})$ $\vec{b}=(-\sqrt{3},1)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=3\times(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\times 1$ $=\underline{\underline{-2\sqrt{3}}}$	③ $\vec{a}=(1,1)$ $\vec{b}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

3. 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題
$\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(4,2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 4+3\times 2=10$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=\underline{\underline{45^\circ}}$
問題
$\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(6,-4)$

4. $\lvert\vec{a}\rvert=1$，$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の値を求めよ。

例題　$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$ を求めよ。
$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ $=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\lvert\vec{b}\rvert^2$ $=1^2+2\times\dfrac{1}{2}+(\sqrt{2})^2=4$ $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert>0$ であるから　$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=\sqrt{4}=\underline{\underline{2}}$
問題　$\lvert\vec{a}+2\vec{b}\rvert$ を求めよ。

数学B　ベクトルの内積 3 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\lvert\vec{a}\rvert=4$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=90^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 90^\circ$ $=4\times\sqrt{2}\times 0=\underline{\underline{0}}$	① $\lvert\vec{a}\rvert=4$, $\lvert\vec{b}\rvert=-2$ $\theta=90^\circ$
② $\lvert\vec{a}\rvert=4$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=45^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 45^\circ$ $=4\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{4}}$	② $\lvert\vec{a}\rvert=4$, $\lvert\vec{b}\rvert=3$ $\theta=45^\circ$
③ $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{2}$ $\theta=60^\circ$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos 60^\circ$ $=2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\underline{\sqrt{6}}}$	③ $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ $\theta=60^\circ$

2. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題	問題
① $\vec{a}=(2,1)$ $\vec{b}=(-1,2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=2\times(-1)+1\times 2=\underline{\underline{0}}$	① $\vec{a}=(1,3)$ $\vec{b}=(-3,1)$
② $\vec{a}=(1,4)$ $\vec{b}=(2,-1)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=1\times 2+4\times(-1)$ $=\underline{\underline{-2}}$	② $\vec{a}=(1,3)$ $\vec{b}=(4,-1)$
③ $\vec{a}=(3,\sqrt{3})$ $\vec{b}=(1,\sqrt{3})$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $=3\times 1+\sqrt{3}\times\sqrt{3}$ $=\underline{\underline{6}}$	③ $\vec{a}=(1,\sqrt{2})$ $\vec{b}=(-2,\sqrt{2})$

3. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題　$\vec{a}=(4,2)$, $\vec{b}=(1,-2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times 1+2\times(-2)=0$$

$$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$$

$$\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{0}{\sqrt{20}\sqrt{5}}=0$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=\underline{\underline{90^\circ}}$

問題　$\vec{a}=(1,-3)$, $\vec{b}=(6,2)$

4. $\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=\sqrt{3}$ のとき, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

例題　$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert=1$

$$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=\lvert\vec{a}\rvert^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\lvert\vec{b}\rvert^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\lvert\vec{a}\rvert^2+\lvert\vec{b}\rvert^2-\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert^2\right)\div 2$$
$$=(4+3-1)\div 2=3$$

問題　$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=1$

数学B　ベクトルの内積(応用)課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題　$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})^2$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=4^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3^2$$
$$=(2\sqrt{7})^2=28$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-6}{4\times3}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

問題①　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{19}$

問題②　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=5$

2. $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

例題　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})^2$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1=2^2$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})^2$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$
$$=2^2+2t\times1+t^2\times1^2$$
$$=t^2+2t+4=(t+1)^2+3$$

$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-1$ のとき 最小値 $\sqrt{3}$ になる。

問題　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{6}$

数学B　ベクトルの内積（応用）2 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題　$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$

$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 6\vec{b}$ が垂直

$\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 6\vec{b}$ が垂直であるから

$(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + 6\vec{b}) = 0$

$|\vec{a}|^2 + 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 6|\vec{b}|^2$

$= 3^2 + 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 6\times 2^2 = 0$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{3\times 2} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\theta = 60^\circ$

問題①　$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$\vec{a} - 2\vec{b}$ と $3\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直

問題②　$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$

$\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直

2. $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

例題　$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$

$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b})^2$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9|\vec{b}|^2$

$= 3^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\times 2^2 = 3^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = (\vec{a} + t\vec{b})^2$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

$= 3^2 + 2t\times 4 + t^2\times 2^2$

$= 4t^2 + 8t + 9 = 4(t+1)^2 + 5$

$|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = -1$ のとき 最小値 $\sqrt{5}$ になる。

問題　$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 5$

数学B　ベクトルの内積(応用) 3 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ について答えよ。

例題　$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,2)$　$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (tは実数) のとき，$|\vec{c}|$の最小値とtの値を求めよ。そのとき，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であることを示せ。

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,1)+t(1,2)$

$=(t+3,2t+1)$

$|\vec{c}|^2=(t+3)^2+(2t+1)^2$

$=5t^2+10t+10=5(t+1)^2+5$

$|\vec{c}|^2$ は $t=-1$ のとき，最小値 5 になる。

$|\vec{c}|$ は $t=-1$ のとき，最小値$\sqrt{5}$ になる。

このとき，$\vec{c}=(2,-1)$ になるから

$\vec{b}\cdot\vec{c}=(1,2)\cdot(2,-1)=0$ であるから

$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は垂直である。

問題　$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,1)$　$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (tは実数) のとき，$|\vec{c}|$の最小値とtの値を求めよ。そのとき，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であることを示せ。

2. $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ について答えよ。

例題　$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=3$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (tは実数) とするとき，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ が垂直のとき，tの値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2=3^2$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=16$

$\vec{c}\cdot\vec{b}$

$=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2$

$=16-16t=0$

よって，$t=1$

問題　$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=4$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (tは実数) とするとき，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ が垂直のとき，tの値を求めよ。