

1. 次の等式(A)を数学的帰納法で証明せよ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots (A)$$

[1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺} = (), \text{右辺} = ()$$

よって $n=1$ のとき(A)が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = ()$$

$n=k+1$ のときの左辺は

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + ()$$

$$= () + ()$$

$$= ()$$

$n=k+1$ のときの右辺は

$$()$$

よって $n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1], [2] より すべての自然数 n について (A)が成り立つ。

2. n を自然数とすると、 $5^n - 1$ が4の倍数であることを証明せよ。

3. n を3以上の自然数とする。次の不等式(A)を証明せよ。

$$3^n > 5n + 1 \cdots (A)$$

4. n が自然数のとき、 $2^{2n-1} + 4^{2n-1}$ が6で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。