数学B　数学的帰納法　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

すべての自然数において，等式 $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ が成り立つことを証明するとき，無限に存在する n の値について調べることはできない。

自然数 n についての命題 $p(n)$ が，すべての自然数について成り立つためには，次のことを示せばよい。この証明方法を(　　　　　　　　)という。

[1] $n=1$ のとき $p(n)$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $p(n)$が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $p(n)$が成り立つ。

問題 A　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を数学的帰納法によって証明せよ。

与えられた等式を(A)とおく。

[1] $n=1$ のとき，(左辺)$=1^3=$(　　)，(右辺)$=$(　　)　だから (A)が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき(A)が成り立つと仮定すると，

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{1}{4}$　(　　　)^2

$n=k+1$ のとき，(A)の左辺は

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}$　(　　　)$^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}$(　　　)^2(　　　)^2

この式は，(A)で $n=k+1$ としたときの右辺に等しくなる。

つまり，$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1],[2]から，すべての自然数 n について(A)が成り立つ。

問題 B　$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ がすべての自然数について成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

問題 C　n を 3 以上の自然数とするとき，$2^n>2n+1$ を証明せよ。

与えられた不等式を(A)とおく。

[1] $n=3$ のとき　(左辺)$=$　　　　　，(右辺)$=$

よって(A)が成り立つ。

[2] $n\geqq 3$ として，$n=k$ のとき(A)が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，(左辺)$=$　　　　　，(右辺)$=$

(左辺)$-$(右辺)$=$

$>$　　　　　　　　　　　$\Leftarrow 2^k>2k+1$

$=$

すなわち　$2^{k+1}>2(k+1)+1$

よって，$n=k+1$ のときも(A)が成り立つ。

[1],[2] から，3 以上の自然数 n について，$2^n>2n+1$ が成り立つ。

問題 D　n を 5 以上の自然数とするとき，$2^n>n^2$ を証明せよ。