

1. 次の数列{ a_n }の第2項から第4項までを求めよ。
Find the second to fourth terms of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>① a_{n+1} = a_n + 3</p> <p>a₁ = 1</p> <p>a₂ = a₁ + 3</p> <p>= 1 + 3 = 4</p> <p>a₃ = a₂ + 3</p> <p>= 4 + 3 = 7</p> <p>a₄ = a₃ + 3</p> <p>= 7 + 3 = 10</p>	<p>① a_{n+1} = a_n + 2</p> <p>a₁ = 1</p>
<p>② a_{n+1} = 3 a_n</p> <p>a₁ = 1</p> <p>a₂ = 3 a₁</p> <p>= 3 × 1 = 3</p> <p>a₃ = 3 a₂</p> <p>= 3 × 3 = 9</p> <p>a₄ = 3 a₃</p> <p>= 3 × 9 = 27</p>	<p>② a_{n+1} = 2 a_n</p> <p>a₁ = 1</p>
<p>③ a_{n+1} = a_n + n</p> <p>a₁ = 1</p> <p>a₂ = a₁ + 1</p> <p>= 1 + 1 = 2</p> <p>a₃ = a₂ + 2</p> <p>= 2 + 2 = 4</p> <p>a₄ = a₃ + 3</p> <p>= 4 + 3 = 7</p>	<p>③ a_{n+1} = a_n + 2 n</p> <p>a₁ = 1</p>

2. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = a_n + 3, a₁ = 1</p> <p>初項 1, 公差 3</p> <p>a_n = 1 + (n - 1) × 3</p> <p>= 3 n - 2</p>	<p>a_{n+1} = a_n + 2, a₁ = 2</p>

3. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = 3 a_n, a₁ = 2</p> <p>初項 2, 公比 3</p> <p>a_n = 2 × 3ⁿ⁻¹</p>	<p>a_{n+1} = 2 a_n, a₁ = 3</p>

4. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a₁ = 1</p> <p>a_{n+1} = a_n + n</p> <p>階差数列は n になる。</p> <p>n ≥ 2 のとき</p> <p>a_n = a₁ + Σ_{k=1}ⁿ⁻¹ k</p> <p>= 1 + (n-1) n / 2</p> <p>= (n² - n + 2) / 2</p> <p>この式は n = 1 のときも成り立つので</p> <p>a_n = (n² - n + 2) / 2</p>	<p>a₁ = 1</p> <p>a_{n+1} = a_n + 2 n</p>

5. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = 3 a_n - 2, a₁ = 2</p> <p>特性方程式 X = 3 X - 2</p> <p>を解き, X = 1</p> <p>a_{n+1} - 1 = 3 (a_n - 1)</p> <p>a_n - 1 は初項 1, 公比 3</p> <p>の等比数列であるから</p> <p>a_n - 1 = 1 × 3ⁿ⁻¹</p> <p>a_n = 3ⁿ⁻¹ + 1</p>	<p>a_{n+1} = 4 a_n - 1, a₁ = 3</p>

1. 次の数列{ a_n }の第2項から第4項までを求めよ。
Find the second to fourth terms of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>① a_{n+1} = a_n + 4</p> <p>a_1 = 4</p> <p>a_2 = a_1 + 4</p> <p>= 4 + 4 = 8</p> <p>a_3 = a_2 + 4</p> <p>= 8 + 4 = 12</p> <p>a_4 = a_3 + 4</p> <p>= 12 + 4 = 16</p>	<p>① a_{n+1} = a_n + 5</p> <p>a_1 = 5</p>
<p>② a_{n+1} = -3 a_n</p> <p>a_1 = 1</p> <p>a_2 = -3 a_1</p> <p>= -3 × 1 = -3</p> <p>a_3 = -3 a_2</p> <p>= -3 × (-3) = 9</p> <p>a_4 = -3 a_3</p> <p>= -3 × 9 = -27</p>	<p>② a_{n+1} = 4 a_n</p> <p>a_1 = 1</p>
<p>③ a_{n+1} = a_n + 2 n + 1</p> <p>a_1 = 1</p> <p>a_2 = a_1 + 2 × 1 + 1</p> <p>= 1 + 3 = 4</p> <p>a_3 = a_2 + 2 × 2 + 1</p> <p>= 4 + 5 = 9</p> <p>a_4 = a_3 + 2 × 3 + 1</p> <p>= 9 + 7 = 16</p>	<p>③ a_{n+1} = a_n + n + 1</p> <p>a_1 = 1</p>

2. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 1</p> <p>初項 1, 公差 2</p> <p>a_n = 1 + (n - 1) × 2</p> <p>= 2 n - 1</p>	<p>a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 2</p>

3. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = 2 a_n, a_1 = 4</p> <p>初項 4, 公比 2</p> <p>a_n = 4 × 2^{n-1}</p>	<p>a_{n+1} = 3 a_n, a_1 = 2</p>

4. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_1 = 1</p> <p>a_{n+1} = a_n + n + 1</p> <p>階差数列は n + 1</p> <p>n ≥ 2 のとき</p> <p>a_n = a_1 + Σ_{k=1}^{n-1} (k + 1)</p> <p>= 1 + (n-1)n/2 + n - 1</p> <p>= (n^2 + n)/2</p> <p>この式は n = 1 のときも成り立つので</p> <p>a_n = (n^2 + n)/2</p>	<p>a_1 = 1</p> <p>a_{n+1} = a_n + 2 n + 1</p>

5. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1} = 4 a_n + 3, a_1 = 2</p> <p>特性方程式 X = 4 X + 3</p> <p>を解き, X = -1</p> <p>a_{n+1} + 1 = 4 (a_n + 1)</p> <p>a_{n+1} は初項 3, 公比 4</p> <p>の等比数列であるから</p> <p>a_{n+1} + 1 = 3 × 4^{n-1}</p> <p>a_n = 3 × 4^{n-1} - 1</p>	<p>a_{n+1} = 2 a_n + 2, a_1 = 3</p>

1. 次の数列{ a_n }の第2項から第4項までを求めよ。
Find the second to fourth terms of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>① a_{n+1}= a_n - 2</p> <p>a_1 = 10</p> <p>a_2 = a_1 - 2</p> <p>= 10 - 2 = 8</p> <p>a_3 = a_2 - 2</p> <p>= 8 - 2 = 6</p> <p>a_4 = a_3 - 2</p> <p>= 6 - 2 = 4</p>	<p>① a_{n+1}= a_n - 3</p> <p>a_1 = 9</p>
<p>② a_{n+1}= 1/2 a_n</p> <p>a_1 = 8</p> <p>a_2 = 1/2 a_1</p> <p>= 1/2 × 8 = 4</p> <p>a_3 = 1/2 a_2</p> <p>= 1/2 × 4 = 2</p> <p>a_3 = 1/2 a_2</p> <p>= 1/2 × 2 = 1</p>	<p>② a_{n+1}= 1/3 a_n</p> <p>a_1 = 27</p>
<p>③ a_{n+1}= a_n + 2^n</p> <p>a_1 = 1</p> <p>a_2 = a_1 + 2^1</p> <p>= 1 + 2 = 3</p> <p>a_3 = a_2 + 2^2</p> <p>= 3 + 4 = 7</p> <p>a_4 = a_3 + 2^3</p> <p>= 7 + 8 = 16</p>	<p>③ a_{n+1}= a_n + 3^n</p> <p>a_1 = 1</p>

2. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1}= a_n - 2, a_1 = 10</p> <p>初項 10, 公差 -2</p> <p>a_n = 10 + (n - 1) × (-2)</p> <p>= -2 n + 12</p>	<p>a_{n+1}= a_n - 3, a_1 = 9</p>

3. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1}= 1/2 a_n, a_1 = 8</p> <p>初項 8, 公比 1/2</p> <p>a_n = 8 × (1/2)^{n-1}</p>	<p>a_{n+1}= 1/3 a_n, a_1 = 27</p>

4. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_1 = 1</p> <p>a_{n+1}= a_n + 3^n</p> <p>階差数列は 3^n</p> <p>n ≥ 2 のとき</p> <p>a_n = a_1 + Σ_{k=1}^{n-1} 3^k</p> <p>= 1 + (3^n - 1) / (3 - 1)</p> <p>= (3^n - 1) / 2</p> <p>この式は n = 1 のときも成り立つので</p> <p>a_n = (3^n - 1) / 2</p>	<p>a_1 = 1</p> <p>a_{n+1}= a_n + 2^n</p>

5. 次の数列{ a_n }の一般項 a_nを求めよ。
Find the n-th term of the following sequence { a_n }.

例題	問題
<p>a_{n+1}= 3 a_n - 4, a_1 = 3</p> <p>特性方程式 X = 3 X - 4</p> <p>を解き, X = 2</p> <p>a_{n+1} - 2 = 3 (a_n - 2)</p> <p>a_n - 2 は初項 1, 公比 3</p> <p>の等比数列であるから</p> <p>a_n - 2 = 1 × 3^{n-1}</p> <p>a_n = 3^{n-1} + 2</p>	<p>a_{n+1} = 4 a_n - 3, a_1 = 2</p>

1. 次の数列{ a_n }の第3項から第4項までを求めよ。
Find the 3rd and 4th terms of the following sequence { a_n }.

例題

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n \quad a_1=4, \quad a_2=10$$
$$a_3=4\times a_2-3\times a_1=4\times 10-3\times 4=28$$
$$a_4=4\times a_3-3\times a_2=4\times 28-3\times 10=82$$

問題

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \quad a_1=3, \quad a_2=5$$

2. 次の漸化式で表された数列{ a_n }を求めよ。
Find the sequence { a_n } expressed by the following recurrence formula.

例題

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n \quad a_1=4, \quad a_2=10$$

特性方程式 $X^2=4X-3$ を解くと $X=1, 3$

$$X^2-4X+3=0, \quad (X-1)(X-3)=0$$
$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_2-a_1=10-4=6$$

$a_{n+1}-a_n$ は初項6, 公比3の等比数列より

$$a_{n+1}-a_n=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n$$

よって $a_n=a_1+2\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$$=4+2\times \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^n+1$$

問題

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \quad a_1=3, \quad a_2=5$$

3. 次の漸化式で表された数列{ a_n }を求めよ。
Find the sequence { a_n } expressed by the following recurrence formula.

例題

$$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n, \quad a_1=1, \quad a_2=4$$

特性方程式 $X^2=5X-6$ を解くと $X=2, 3$

$$X^2-5X+6=0, \quad (X-2)(X-3)=0$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$
$$a_2-2a_1=4-2\times 1=2$$

$a_{n+1}-2a_n$ は初項2, 公比3の等比数列

$$a_{n+1}-2a_n=2\times 3^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$
$$a_2-3a_1=4-3\times 1=1$$

$a_{n+1}-3a_n$ は初項1, 公比2の等比数列

$$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②より

$$a_n=2\times 3^{n-1}-2^{n-1}$$

問題

$$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n \quad a_1=1, \quad a_2=2$$

1. 次の数列の第3項から第4項までを求めよ。
- Find the 3rd and 4th terms of the following sequence $\{a_n\}$.

例題

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n, \quad a_1=1, \quad a_2=3$$
$$a_3=2\times a_2+3\times a_1=2\times 3+3\times 1=9$$
$$a_4=2\times a_3+3\times a_2=2\times 9+3\times 3=27$$

問題

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4a_n \quad a_1=1, \quad a_2=4$$

2. 次の漸化式で表された数列 $\{a_n\}$ を求めよ。
- Find the sequence $\{a_n\}$ expressed by the following recurrence formula.

例題

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n, \quad a_1=1, \quad a_2=3$$

特性方程式 $X^2=2X+3$ を解くと $X=-1, 3$

$$X^2-2X-3=0, \quad (X+1)(X-3)=0$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=-(-a_{n+1}-3a_n)$$
$$a_2-3a_1=3-3\times 1=0$$
$$a_{n+1}-3a_n=0$$
$$a_{n+1}=3a_n \text{ より}$$
$$a_n \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } 3 \text{ の等比数列であるから}$$
$$a_n=3^{n-1}$$

問題

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4a_n, \quad a_1=1, \quad a_2=4$$

4. 次の漸化式で表された数列 $\{a_n\}$ を求めよ。
- Find the sequence $\{a_n\}$ expressed by the following recurrence formula.

例題

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-8a_n, \quad a_1=1, \quad a_2=3$$

特性方程式 $X^2=5X-6$ を解くと $X=2, 4$

$$X^2-5X+6=0, \quad (X-2)(X-4)=0$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}=4(a_{n+1}-2a_n)$$
$$a_2-2a_1=3-2\times 1=1$$
$$a_{n+1}-2a_n \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } 4 \text{ の等比数列}$$
$$a_{n+1}-2a_n=4^{n-1} \cdots \textcircled{1}$$
$$a_{n+2}-4a_{n+1}=2(a_{n+1}-4a_n)$$
$$a_2-4a_1=3-4\times 1=-1$$
$$a_{n+1}-4a_n \text{ は初項 } -1, \text{ 公比 } 2 \text{ の等比数列}$$
$$a_{n+1}-4a_n=-2^{n-1} \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ より } 2a_n=4^{n-1}+2^{n-1}$$
$$a_n=\frac{4^{n-1}+2^{n-1}}{2}$$

問題

$$a_{n+2}=7a_{n+1}-10a_n \quad a_1=1, \quad a_2=3$$

1. 次の漸化式で表された数列{ a_n }を求めよ。
Find the sequence { a_n } expressed by the following recurrence formula.
2. 次の漸化式で表された数列{ a_n }を求めよ。
Find the sequence { a_n } expressed by the following recurrence formula.

例題 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n, a_1=0, a_2=1$

特性方程式 $X^2=X+6$ を解くと $X=3, -2$

$X^2-X-6=0, (X-3)(X+2)=0$

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$

$a_2+2a_1=1+2\times 0=1$

$a_{n+1}+2a_n$ は初項1, 公比3の等比数列

$a_{n+1}+2a_n=3^{n-1} \dots ①$

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$

$a_2-3a_1=1-3\times 0=1$

$a_{n+1}-3a_n$ は初項1, 公比-2の等比数列

$a_{n+1}-3a_n=(-2)^{n-1} \dots ②$

$(①-②)\div 5$ より

$a_n=\frac{3^{n-1}-(-2)^{n-1}}{5}$

問題 $a_{n+2}=2a_{n+1}+8a_n, a_1=0, a_2=1$

例題 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n, a_1=0, a_2=4$

特性方程式 $X^2=4X-4$ を解くと $X=2$

$X^2-4X+4=0, (X-2)^2=0$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$a_2-2a_1=4-0=4$

$a_{n+1}-2a_n$ は初項4, 公比2の等比数列より

$a_{n+1}-2a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=1$

$\frac{a_n}{2^n}$ を b_n とすると, $b_1=0, b_2=2$

$b_{n+1}-b_n$ は公差1の等差数列より

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}1=n-1$

よって, $a_n=(n-1)\times 2^n$

問題 $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n, a_1=0, a_2=9$

数列

$a_{n+1} = 2 a_n + n, a_1 = 1$

について答えよ。

例題①

数列 $\{a_n\}$ の第2項から第4項まで求めよ。

Find the second through fourth terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n = 1$ のとき

$a_2 = 2 a_1 + 1 = 3$

$n = 2$ のとき

$a_3 = 2 a_2 + 2 = 8$

$n = 3$ のとき

$a_4 = 2 a_3 + 3 = 19$

例題②

階差数列 $\{b_n\}$ を用いて, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

Find the sequence $\{a_n\}$ using the difference sequence $\{b_n\}$.

$a_{n+1} = 2 a_n + n$ より, $a_{n+2} = 2 a_{n+1} + n + 1$

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2 (a_{n+1} - a_n) + 1$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると

$b_{n+1} = 2 b_n + 1, b_1 = a_2 - a_1 = 2$

$b_{n+1} + 1 = 2 (b_n + 1), b_1 + 1 = 3$

$b_{n+1} + 1$ は初項3, 公比2の等比数列であるから

$b_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$

b_n は a_n の階差数列 であるから, $n \geq 2$ のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \times 2^{k-1} - 1)$

$= 1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$= 1 + 3 \times \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1)$

$= 3 \times 2^{n-1} - n - 1$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

$a_n = 3 \times 2^{n-1} - n - 1$

例題③

$a_{n+1} + g(n+1) = 2 (a_n + g(n))$ となる

一次式 $g(x)$ を利用して, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

Find the sequence $\{a_n\}$ using the linear expression $g(x)$.

$g(x) = ax + b$ とおくと

$a_{n+1} + a(n+1) + b = 2 (a_n + a n + b)$

$a_{n+1} = 2 a_n + a n - a + b \quad \therefore a = 1, b = 1$

$a_{n+1} + (n+2) = 2 (a_n + n + 1), a_1 + 2 = 3$

数列 $\{a_n + n + 1\}$ は初項3, 公比2 の等比数列

$a_n + n + 1 = 3 \times 2^{n-1}$

$a_n = 3 \times 2^{n-1} - n - 1$

数列

$a_{n+1} = 3 a_n + 2 n, a_1 = 0$

について答えよ。

問題①

数列 $\{a_n\}$ の第2項から第4項まで求めよ。

問題②

数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

すうれつ
数列

$a_{n+1}=3 a_n + 2 n - 1, \quad a_1 = 1$

こた
について答えよ。

れいだい
例題①

すうれつ
数列 $\{ a_n \}$

だい
の第 2 項

こう
から第 4 項

だい
まで求めよ。

Find the second through fourth terms of the sequence $\{ a_n \}$.

$$n = 1 \text{ のとき } \quad a_2 = 3 \ a_1 + 2 - 1 = 4$$
$$n = 2 \text{ のとき } \quad a_3 = 3 \ a_2 + 4 - 1 = 15$$
$$n = 3 \text{ のとき } \quad a_4 = 3 \ a_3 + 6 - 1 = 50$$

れいだい
例題②

かいさすうれつ
階差数列 $\{ b_n \}$

もち
を用いて,

すうれつ
数列 $\{ a_n \}$

もと
を求めよ。

Find the sequence $\{ a_n \}$ using the difference sequence $\{ b_n \}$.

$$a_{n+1} = 3 \ a_n + 2n - 1 \text{ より, } a_{n+2} = 3 \ a_{n+1} + 2n + 1$$
$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3 \ (a_{n+1} - a_n) + 2$$
$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とすると}$$
$$b_{n+1} = 3 \ b_n + 2, \quad b_1 = a_2 - a_1 = 3$$
$$b_{n+1} + 1 = 3 \ (b_n + 1), \quad b_1 + 1 = 4$$
$$b_n + 1 \text{ は初項 } 4, \quad \text{公比 } 3 \text{ の等比数列であるから}$$
$$b_n = 4 \times 3^{n-1} - 1$$
$$b_n \text{ は } a_n \text{ の階差数列 であるから, } n \geq 2 \text{ のとき}$$
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(4 \times 3^{n-k} - 1 \right)$$
$$= 1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} 3^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$
$$= 1 + 4 \times \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} - (n - 1)$$
$$= 2 \times 3^{n-1} - n$$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} - n$$

れいだい
例題③

$a_{n+1} + g(n + 1) = 3 \ (a_n + g(n))$

なる

いちじしき
一次式 $g(x)$

りよう
を利用して,

すうれつ
数列 $\{ a_n \}$

もと
を求めよ。

Find the sequence $\{ a_n \}$ using the linear expression $g(x)$.

$$g(x) = a x + b \text{ とおくと}$$
$$a_{n+1} + a \ (n + 1) + b = 3 \ (a_n + a n + b)$$
$$a_{n+1} = 3 \ a_n + 2 \ a n - a + 2 \ b \quad \therefore a = 1, b = 0$$
$$a_{n+1} + n + 1 = 3 \ (a_n + n), \quad a_1 + 1 = 2$$

すうれつ
数列 $\{ a_n + n \}$

しよこう
は初項 2,

こうひ
公比 3

とうひすうれつ
の等比数列

$$a_n + n = 2 \times 3^{n-1}$$
$$a_n = 2 \times 3^{n-1} - n$$

すうれつ
数列

$a_{n+1} = 2 a_n + n + 1, \quad a_1 = 1$

こた
について答えよ。

もんだい
問題①

すうれつ
数列 $\{ a_n \}$

だい
の第 2 項

こう
から第 4 項

だい
まで求めよ。

Find the second through fourth terms of the sequence $\{ a_n \}$.

もんだい
問題②

すうれつ
数列 $\{ a_n \}$

もと
を求めよ。

Find the sequence $\{ a_n \}$.

数列 $a_{n+1} = -a_n + 2n$, $a_1 = 1$ について答えよ。

例題① 数列 $\{a_n\}$ の第 2 項, 第 3 項を求めよ。
Find the second through fourth terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n = 1$ のとき $a_2 = -a_1 + 2 = 1$

$n = 2$ のとき $a_3 = -a_2 + 4 = 3$

例題② 階差数列 $\{b_n\}$ を用いて, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。
Find the sequence $\{a_n\}$ using the difference sequence $\{b_n\}$.

$a_{n+1} = -a_n + 2n$ より, $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2n + 2$

$a_{n+2} - a_{n+1} = -(a_{n+1} - a_n) + 2$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると

$b_{n+1} = -b_n + 2$, $b_1 = a_2 - a_1 = 0$

$b_{n+1} - 1 = -(b_n - 1)$, $b_1 - 1 = -1$

b_{n-1} は初項 -1 , 公比 -1 の等比数列であるから

$b_n = -1 \times (-1)^{n-1} + 1 = -(-1)^{n-1} + 1$

b_n は a_n の階差数列 であるから, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{ -(-1)^{k-1} + 1 \}$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$
$$= 1 - \frac{(-1)^{n-1} - 1}{-1 - 1} + (n - 1)$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2} + n$$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2} + n$$

例題③ $a_{n+1} + g(n+1) = -(a_n + g(n))$ となる
一次式 $g(x)$ を利用して, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。
Find the sequence $\{a_n\}$ using the linear expression $g(x)$.

$g(x) = ax + b$ とおくと

$a_{n+1} + a(n+1) + b = -(a_n + an + b)$

$a_{n+1} = -a_n - 2an - a - 2b \therefore a = -1, b = -\frac{1}{2}$

$a_{n+1} - n + \frac{1}{2} = -(a_n - n + \frac{1}{2})$

数列 $\{a_n - n + \frac{1}{2}\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$, 公比 -1 の等比数列であるから

$a_n - n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (-1)^{n-1}$

$a_n = \frac{1}{2} (-1)^{n-1} - \frac{1}{2} + n$

数列 $a_{n+1} = -a_n + 2n + 3$, $a_1 = 1$ について答えよ。

問題① 数列 $\{a_n\}$ の第 2 項, 第 3 項を求めよ。
Find the second and third terms of the sequence $\{a_n\}$.

問題② 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。
Find the sequence $\{a_n\}$.

すうれつ

数列 $a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$, $a_1=3$ について答えよ。

れいだい

例題①

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の第2項, 第3項を求めよ。

Find the second and third terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n=1$ のとき $a_2=3a_1+3^2=18$

$n=2$ のとき $a_3=3a_2+3^3=81$

れいだい

例題②

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term of the sequence $\{a_n\}$.

りようへん

両辺を 3^{n+1} で割り, $b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+1 \quad \text{より}$$
$$b_{n+1}=b_n+1, \quad b_1=\frac{a_1}{3}=1$$

すうれつ

数列 $\{b_n\}$ は初項1, 公差1 の等差数列となり,
$$b_n=1+(n-1)\times 1=n$$

よって

$$a_n=3^n\times n$$

すうれつ

数列 $a_{n+1}=3a_n^2$, $a_1=1$ について答えよ。

れいだい

例題③

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の第2項, 第3項を求めよ。

Find the second and third terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n=1$ のとき $a_2=3a_1\times a_1=9$

$n=2$ のとき $a_3=3a_2\times a_2=243$

れいだい

例題④

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term of the sequence $\{a_n\}$.

$a_{n+1}=3a_n^2$, $a_1=1>0$ より

a_n はすべての自然数において正である。

ぜんかしきりようへんていすうたいすう漸化式の両辺を底を3とする対数をとると

$$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3a_n^2=\log_3 a_n^2+\log_3 3$$
$$=2\log_3 a_n+1$$

$b_n=\log_3 a_n$ とおくと, $a_n=3^{b_n}$

$$b_{n+1}=2b_n+1, \quad b_1=\log_3 a_1=0$$
$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

すうれつ

数列 $\{b_n+1\}$ は初項1, 公比2の等比数列となり,
$$b_n=1\times 2^{n-1}-1=2^{n-1}-1$$

よって

$$a_n=3^{2^{n-1}-1}$$

もんだい

問題①

すうれつ

数列 $a_{n+1}=4a_n+4^{n+1}$, $a_1=4$ の一般項 a_n を求めよ。

もんだい

問題②

すうれつ

数列 $a_{n+1}=4a_n^2$, $a_1=1$ の一般項 a_n を求めよ。

すうれつ

数列 $a_{n+1}=2a_n+2^n$, $a_1=2$ について答えよ。

れいだい

例題①

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の第2項, 第3項を求めよ。

Find the second and third terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n=1$ のとき $a_2=2a_1+2^1=6$

$n=2$ のとき $a_3=2a_2+2^2=16$

れいだい

例題②

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term of the sequence $\{a_n\}$.

りょうへん

両辺を 2^{n+1} で割り, $b_n=\frac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$
より

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}, b_1=\frac{a_1}{2}=1$$

すうれつ

数列 $\{b_n\}$ は初項1, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列となり,

$$b_n=1+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$$

$$a_n=2^n\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)=2^{n-1}(n+1)$$

もんだい

問題①

すうれつ

数列 $a_{n+1}=3a_n+3^n$, $a_1=9$ の

いつばんこう

一般項 a_n を求めよ。

すうれつ

数列 $a_{n+1}=2a_n^2$, $a_1=2$ について答えよ。

れいだい

例題③

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の第2項, 第3項を求めよ。

Find the second and third terms of the sequence $\{a_n\}$.

$n=1$ のとき $a_2=2a_1\times a_1=8$

$n=2$ のとき $a_3=2a_2\times a_2=128$

れいだい

例題④

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term of the sequence $\{a_n\}$.

$a_{n+1}=2a_n^2$, $a_1=2>0$ より

a_n はすべての自然数において正である。

ぜんかしき

漸化式の両辺を底を2とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n^2=\log_2 a_n^2+\log_2 2$$
$$=2\log_2 a_n+1$$

$$b_n=\log_2 a_n$$
とおくと, $a_n=2^{b_n}$

$$b_{n+1}=2b_n+1$$
 , $b_1=\log_2 a_1=1$

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

すうれつ

数列 $\{b_n+1\}$ は初項2, 公比2の等比数列となり,

$$b_n=2\times 2^{n-1}-1=2^n-1$$

よって $a_n=2^{2^n-1}$

もんだい

問題②

すうれつ

数列 $a_{n+1}=4a_n^2$, $a_1=4$ の

いつばんこう

一般項 a_n を求めよ。

例題 $a_{n+1}=2a_n+b_n$, $b_{n+1}=3a_n+4b_n$
 $a_1=2, b_1=6$ について答えよ。

(1) a_2, b_2 を求めよ。 Find the terms of a_2, b_2 .

$$a_2=2a_1+b_1=2\times2+6=10$$
$$b_2=3a_1+4b_1=3\times2+4\times6=30$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の漸化式を作れ。 Recurrence formula.

$$b_n=a_{n+1}-2a_n$$
$$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$$
$$b_{n+1}=3a_n+4b_n \text{ に代入する。}$$
$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n+4(a_{n+1}-2a_n)$$
$$a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0$$

(3) 数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。 Find the n -th terms of the sequence $\{a_n\}, \{b_n\}$.

特性方程式 $X^2-6X+5=0$ を解き , $X=1, 5$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_2-a_1=10-2=8$$
$$a_{n+1}-a_n=8\times5^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2}-5a_{n+1}=(a_{n+1}-5a_n)$$
$$a_2-5a_1=10-2\times5=0$$
$$a_{n+1}-5a_n=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ より } 4a_n=8\times5^{n-1}$$
$$a_n=2\times5^{n-1}$$

$$b_n=a_{n+1}-2a_n \text{ に代入して}$$
$$b_n=2\times5^n-2\times2\times5^{n-1}$$
$$=2\times5\times5^{n-1}-4\times5^{n-1}$$
$$=6\times5^{n-1}$$

よって $a_n=2\times5^{n-1}$

$$b_n=6\times5^{n-1}$$

問題 $a_{n+1}=3a_n+b_n$, $b_{n+1}=2a_n+4b_n$
 $a_1=2, b_1=4$ について答えよ。

(1) a_2, b_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の漸化式を作れ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

例題

$$a_{n+1}=3a_n+b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+4b_n$$
$$a_1=2, b_1=4 \text{ について答えよ。}$$

(1)

a_2, b_2 を求めよ。

Find the terms of a_2, b_2 .

$$a_2=3a_1+b_1=3\times 2+4=10$$
$$b_2=2a_1+4b_1=2\times 2+4\times 4=20$$

(2)

数列 $\{a_n+k b_n\}$ が等比数列になる k を求めよ。

Find the k such that the sequence $\{a_n+k b_n\}$ is a geometric progression.

数列 $\{a_n+k b_n\}$ が等比数列になる条件は

$$a_{n+1}+k b_{n+1}=l(a_n+k b_n)$$

となる k, l が存在することである。

a_{n+1}, b_{n+1} を代入して

$$(3a_n+b_n)+k(2a_n+4b_n)$$
$$=l(a_n+k b_n)$$

$$3+2k=l, \quad 1+4k=kl \text{ より}$$
$$1+4k=k(3+2k)$$
$$2k^2-k-1=(2k+1)(k-1)=0$$
$$k=1, -\frac{1}{2}$$

(3)

数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

Find the n -th terms of the sequence $\{a_n\}, \{b_n\}$.

$$k=1 \text{ のとき, } l=5 \text{ より}$$
$$a_n+b_n=5^{n-1}(2+4)=6\times 5^{n-1}$$

$$k=-\frac{1}{2} \text{ のとき, } l=1+2\times(-\frac{1}{2})=0$$
$$a_n-\frac{1}{2}b_n=0^{n-1}(2-\frac{1}{2}\times 4)=0$$

$$b_n=2a_n \text{ より}$$
$$a_n+b_n=a_n+2a_n=3a_n=6\times 5^{n-1}$$

$$a_n=2\times 5^{n-1}$$

$$b_n=4\times 5^{n-1}$$

問題

$$a_{n+1}=2a_n+b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+3b_n$$
$$a_1=2, b_1=4 \text{ について答えよ。}$$

(1)

a_2, b_2 を求めよ。

(2)

数列 $\{a_n+k b_n\}$ が等比数列になる k を求めよ。

(3)

数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

れい だい

例題

$$a_{n+1}=3a_n+b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+2b_n$$
$$a_1=1, b_1=4 \text{ について答えよ。}$$

(1)

a_2, b_2 を求めよ。

Find the terms of a_2, b_2 .

$$a_2=3a_1+b_1=3\times 1+4=7$$
$$b_2=2a_1+2b_1=2\times 1+2\times 4=10$$

(2)

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ぜんかしき} \\ \text{漸化式} \end{smallmatrix} \right\}$ を作れ。

Find the recurrence formula for the sequence $\{a_n\}$.

$$b_n=a_{n+1}-3a_n$$
$$b_{n+1}=a_{n+2}-3a_{n+1}$$
$$b_{n+1}=2a_n+2b_n \text{ に代入する。}$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_n+2(a_{n+1}-3a_n)$$
$$a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$$

(3)

すうれつ

数列 $\{a_n\}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{すうれつ} \\ \text{数列} \end{smallmatrix} \right\}$ $\{b_n\}$ の $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{いつぱんこう} \\ \text{一般項} \end{smallmatrix} \right\}$ を求めよ。

Find the n -th terms of the sequence $\{a_n\}, \{b_n\}$.

とくせいほうていしき

特性方程式 $X^2-5X+4=0$ を $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{と} \\ \text{解} \end{smallmatrix} \right\}$ き, $X=1, 4$

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=(a_{n+1}-4a_n)$$
$$a_2-4a_1=7-4\times 1=3$$
$$a_{n+1}-4a_n=3 \qquad \cdots \textcircled{1}$$
$$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$$
$$a_2-a_1=7-1=6$$
$$a_{n+1}-a_n=6\times 4^{n-1} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

②-①より $3a_n=6\times 4^{n-1}-3$

$$a_n=2\times 4^{n-1}-1$$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ に代入して

$$b_n=(2\times 4^n-1)-3(2\times 4^{n-1}-1)$$
$$=8\times 4^{n-1}-1-6\times 4^{n-1}+3$$
$$=2\times 4^{n-1}+2$$

よって

$$a_n=2\times 4^{n-1}-1$$
$$b_n=2\times 4^{n-1}+2$$

もんだい

問題

$$a_{n+1}=2a_n+b_n, \quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$
$$a_1=1, b_1=3 \text{ について答えよ。}$$

(1)

a_2, b_2 を求めよ。

(2)

すうれつ

数列 $\{a_n\}$ の $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ぜんかしき} \\ \text{漸化式} \end{smallmatrix} \right\}$ を作れ。

(3)

すうれつ

数列 $\{a_n\}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{すうれつ} \\ \text{数列} \end{smallmatrix} \right\}$ $\{b_n\}$ の $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{いつぱんこう} \\ \text{一般項} \end{smallmatrix} \right\}$ を求めよ。

例題 $a_{n+1}=2a_n+b_n, \quad b_{n+1}=2a_n+3b_n$
 $a_1=2, b_1=4$ の一般項を求めよ。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を行列で表せ。行列を A とする。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

(2) 行列 A の固有値を求めよ。 Eigenvalue

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

よって、固有値は $\lambda = 1, 4$

(3) 行列 A の固有ベクトルを求めよ。 Eigenvector

$$\lambda = 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$x + y = 0 \quad \text{よって } x = 1 \text{ のとき } y = -1$$

$$\lambda = 4 \text{ のとき } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$-2x + y = 0 \quad \text{よって } x = 1 \text{ のとき } y = 2$$

$$\text{よって, } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \neq 0$$

(3) 行列 A を対角化せよ。 Diagonalize

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とすると } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP$ を求める。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4) A^n を求めよ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ より } P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ -1 & 2 \times 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^{n+1} & -1+4^{n+1} \\ -2+2 \times 4^{n+1} & 1+2 \times 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

(5) 数列 $\{a_n\}$, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^{n+1} & -1+4^{n+1} \\ -2+2 \times 4^{n+1} & 1+2 \times 4^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 4^{n+1} \\ 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

問題 $a_{n+1}=2a_n+b_n, \quad b_{n+1}=3a_n+4b_n$
 $a_1=1, b_1=3$ の一般項を求めよ。

1. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n -th term a_n of the following sequence { a_n }.

例題

$$a_1=1, \quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=4^{n-1}$$
$$b_n=\frac{1}{a_n} \text{ とおくと } b_1=\frac{1}{1}=1$$
$$b_{n+1}-b_n=4^{n-1} \text{ より } n\geq 2 \text{ のとき}$$
$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^{k-1}=1+\frac{1(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$$
$$b_1=1 \text{ より, この式は } n=1 \text{ でも成り立つ。}$$
$$\text{よって } a_n=\frac{3}{4^{n-1}+2}$$

問題①

$$a_1=1, \quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2^{n-1}$$

問題②

$$a_1=1, \quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2^n$$

2. 次の数列{ a_n }の一般項 a_n を求めよ。
Find the n -th term a_n of the following sequence { a_n }.

例題

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+2}$$
$$a_1=1 \text{ と漸化式の形から } a_n>0 \text{ になる。}$$
$$\text{漸化式の両辺の逆数をとると}$$
$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{a_n}=3+\frac{2}{a_n}$$
$$b_n=\frac{1}{a_n} \text{ とおくと } b_1=\frac{1}{1}=1$$
$$b_{n+1}=2b_n+3$$
$$\text{特性方程式 } \mathbf{X=2X+3} \text{ を解き, } \mathbf{X=-3}$$
$$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$$
$$\{b_n+3\} \text{ は初項4, 公比2の等比数列になる。}$$
$$b_n+3=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$$
$$b_n=2^{n+1}-3$$
$$\text{よって } a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$$

問題

$$a_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$$

例題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term a_n of the following sequence $\{ a_n \}$.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$$

特性方程式 $X = 4 - \frac{3}{X}$ より $X = 1, 3$

$X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) = 0$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} - 3} = \frac{4 - \frac{3}{a_n} - 1}{4 - \frac{3}{a_n} - 3}$$

$$= \frac{3 - \frac{3}{a_n}}{1 - \frac{3}{a_n}}$$

$$= \frac{3(a_n - 1)}{a_n - 3}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n - 3} = b_n \text{ とすると } b_1 = \frac{2 - 1}{2 - 3} = -1$$

$$b_{n+1} = 3b_n \text{ より } b_n = -3^{n-1}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n - 3} = -3^{n-1}$$

$$a_n - 1 = -3^{n-1}(a_n - 3)$$
$$= -3^{n-1}a_n + 3^n$$

$$(1 + 3^{n-1})a_n = 1 + 3^n$$

$$a_n = \frac{1 + 3^n}{1 + 3^{n-1}}$$

問題

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term a_n of the following sequence $\{ a_n \}$.

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$$

れいだい

例題①

いっばんこう

もと

$$S_n = 2a_n + n + 1$$

の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term a_n of $S_n = 2a_n + n + 1$.

$$S_1 = a_1 = 2a_1 + 1 + 1 \quad \text{より} \quad a_1 = -2$$

$$S_n = 2a_n + n + 1 \quad \text{より}$$

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1) + 1 = 2a_{n+1} + n + 2$$

$$S_{n+1} - S_n = (2a_{n+1} + n + 2) - (2a_n + n + 1)$$

$$= 2a_{n+1} - 2a_n + 1 = a_{n+1}$$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1} - 2a_n + 1 = 0$$

とくせいほうていしき

特性方程式 $X^2 - 2X + 1 = 0$

と

を解き, $X = 1$

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$$
$$\{a_n - 1\}$$

しよこう

は初項 -3 ,

こうひ

公比 2

とうひすうれつ

の等比数列
$$a_n = -3 \times 2^{n-1} + 1$$

れいだい

例題②

いっばんこう

もと

$$S_n = 2a_n - 2^n$$

の一般項 a_n を求めよ。

Find the n -th term a_n of $S_n = 2a_n - 2^n$.

$$S_1 = a_1 = 2a_1 - 2^1 \text{より} \quad a_1 = 2$$

$$S_n = 2a_n - 2^n \text{より} \quad S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2^{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n$$

$$= (2a_{n+1} - 2^{n+1}) - (2a_n - 2^n)$$

$$= 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n = a_{n+1}$$

$$\text{したがって} \quad a_{n+1} - 2a_n - 2^n = 0$$

りようへん

両辺を 2^{n+1}

わ

で割り整理すると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とすると } b_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$b_{n+1} - b_n - \frac{1}{2} = 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1}$$

しよこう

は初項 1 ,

こうさ

公差 $\frac{1}{2}$

とうさすうれつ

の等差数列

$$b_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) \times 2^n$$

$$= 2^{n-1}(n+1)$$

もんだい

問題①

いっばんこう

もと

$$S_n = 2a_n + n - 1$$

の一般項 a_n を求めよ。

もんだい

問題②

いっばんこう

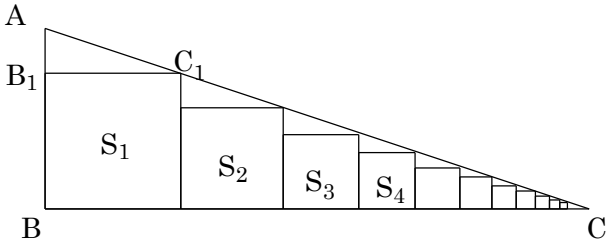
もと

$$S_n = 2a_n + 2^n$$

の一般項 a_n を求めよ。

1. 次の図形について答えよ。 Answer about the following figure.

例題 AB = 4, BC = 12, ∠ABC = 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 S₁, S₂, ... をおく。正方形の一边の長さを a₁, a₂, a₃, ... とする。a_n の値を n の式で表せ。



S₁ の1 辺の長さ a₁ は、△AB₁C₁ の△ABC より

AB₁ : B₁C₁ = AB : BC

4 - a₁ : a₁ = 4 : 12 ∴ a₁ = 3

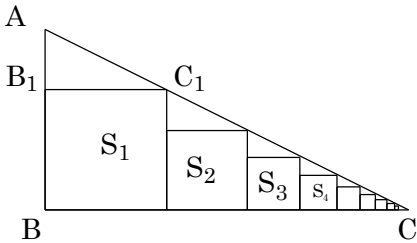
S₂ の1 辺の長さ a₂ も同様に

3 - a₂ : a₂ = 4 : 12 ∴ a₂ = 9/4

{a_n} は初項 3, 公比 3/4 の等比数列になる。

a_n = 3 (3/4)ⁿ⁻¹

問題 AB = 3, BC = 6, ∠ABC = 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 S₁, S₂, ... をおく。正方形の一边の長さを a₁, a₂, a₃, ... とする。a_n の値を n の式で表せ。



2. 次の図形について答えよ。 Answer about the following figure.

例題 平面上に n 本の直線があり、平行な直線はなく、どの 3 本も同一の点を通らない。これらの直線によってできる交点の個数 a_n を n の式で表せ。

1本は交点がなく、a₁ = 0

2本は1本目との交点ができ、a₂ = 1

3本は1, 2本目との交点が追加され、

a₃ = 1 + 2 = 3

n 本の直線に、1本追加すると、

n 本との交点が追加される。

したがって、a_{n+1} = a_n + n

a_{n+1} - a_n = n, a₁ = 0

n ≥ 2 のとき

a_n = a₁ + Σ_{k=1}ⁿ⁻¹ k = 0 + (n-1)n/2 = n(n-1)/2

この式は n = 1 のときも成り立つ。

a_n = n(n-1)/2

問題 平面上に n 本の直線があり、平行な直線はなく、どの 3 本も同一の点を通らない。これらの n 本の直線によって、平面は何個に分割されるか。