

漸化式

数列 $\{a_n\}$ において, [1] $a_1 = 1$, [2] $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とすると, この2つの条件によって, 数列 $\{a_n\}$ が定まる。具体的に n を代入してみよう。

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times () + 1 = ()$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times () + 1 = ()$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times () + 1 = ()$$

このように各項の値が一通りに定まる。[2]のように数列の前後の項の関係を表す式を()式という。

問題A 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の第4項を求めよ。

| | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$ | (2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$ |
| $a_2 =$ | $a_2 =$ |
| $a_3 =$ | $a_3 =$ |
| $a_4 =$ | $a_4 =$ |

| | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| (3) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n$ | (4) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$ |
| $a_2 =$ | $a_2 =$ |
| $a_3 =$ | $a_3 =$ |
| $a_4 =$ | $a_4 =$ |

等差数列・等比数列の漸化式

公差を d とするとき, 等差数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $(a_{n+1} =)$,
 公比を r とするとき, 等比数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $(a_{n+1} =)$ になる。

問題B 次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$ (2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3 \times a_n$

階差数列の漸化式

漸化式が $a_{n+1} = a_n + f(n)$ の形の漸化式は階差数列を利用して一般項を求める。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

問題C 次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

| | |
|--|--|
| (1) $a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 1$ | (2) $a_{n+1} = a_n + 2^n, a_1 = 1$ |
| $a_{n+1} - a_n = ()$ より, 階差数列は $()$ になる。 | $a_{n+1} - a_n = ()$ より 階差数列は $()$ になる。 |
| $n \geq 2$ のとき $a_n = () + \sum_{k=1}^{n-1} ()$ | $n \geq 2$ のとき $a_n = () + \sum_{k=1}^{n-1} ()$ |
| $a_n = () + \frac{1}{2}n(n-1)$ | $a_n = () + \frac{()}{()}$ |
| $a_n = \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \right)$ | $a_n = ()$ |

$a_1 = 1$ より $n = 1$ のときも成り立つ。 $a_1 = 1$ より $n = 1$ のときも成り立つ。

$a_{n+1} = pa_n + q$ の漸化式

特性方程式 $X = pX + q$ の解を用いて $a_{n+1} - \text{解} = p(a_n - \text{解})$ に変形する。

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ の特性方程式 $X = 2X + 1$ より $X = ()$
 $(a_{n+1} -) = 2(a_n -)$ より
 $(a_n -)$ は(初項 公比)の等比数列になる。
 $(a_n -) = ()$ より $(a_n =)$

問題C $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。