

数学B いろいろな数列の和 ()年()組()番()

数列の和と一般項

数列の和と一般項の関係をを利用して、一般項を求めることができる。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると、 $n \geq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = (\quad)$$

したがって、 $S_n - S_{n-1} = (\quad)$ になる。また、 $S_1 = (\quad)$ より、次の事が分かる。

$$a_1 = (\quad), n \geq 2 \text{ のとき } a_n = (\quad)$$

問題 A 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = 2n^2 - n$ で表されるとき、一般項 a_n を求めよ。

$n = 1$ のとき

$$a_1 = S_1 =$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$$

ここで、 $a_n = (\quad)$ は $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n = (\quad)$$

問題 B 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = n^2$ で表されるとき、一般項 a_n を求めよ。

階差数列

数列 $\{a_n\}$ があるとき、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ として得られる数列 $\{b_n\}$ をもとの数列 $\{a_n\}$ の

()という。階差数列から、一般項を求めることを考える。

数列 $\{a_n\} = 1, 4, 9, 16, 25, \dots$ の各項から直前の項の差を作ると、 $3, 5, 7, 9, \dots$ になる。

これは、(初項, 公差)の等差数列になる。 $b_n =$

数列 $\{a_n\}$ を先の等差数列をもとに考える。

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3, a_3 = a_2 + 5 = 1 + 3 + 5, a_4 = a_3 + (\quad) =$$

この様にして、 $n \geq 2$ のとき、第 n 項 a_n は

$$a_n = 1 + \{3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)\} = 1 + \frac{(n-1)\{ \text{初項} + \text{末項} \}}{2} =$$

$a_1 = 1$ だから、 $n = 1$ のときも成り立つ。よって、 $a_n =$

階差数列と一般項の公式

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n=1 \text{ のときも調べる})$$

問題 C 次の数列の階差数列はどんな数列か？

(1) $1, 2, 5, 10, 12, \dots$

(2) $1, 3, 7, 15, 31, \dots$

(初項, 公差)の等差数列

問題 D 数列 $0, 2, 6, 12, 20, \dots$ の一般項 a_n を求めよ。

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると b_n は()となる。

これは(初項, 公差)の等差数列になるから、 $b_n =$

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} =$$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。よって、 $a_n = n(n \quad)$

数学B いろいろな数列の和 ()年()組()番()

分数の数列の和

分数式 $\frac{1}{k(k+1)}$ を $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ の形にすることを部分分数に分解するという。

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)}{k(k+1)} + \frac{bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

係数を比較して $a+b = ()$, $a = ()$ よって, $a = ()$, $b = ()$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ になる。このことを利用して, 数列の和を求めよ。

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)$$

問題 A 恒等式 $\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$ を利用して

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

等差 × 等比の数列の和

$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4$ を求めてみよう。

$$S = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$-) 3S = (3 + 6 + 9 + 12 + 15)$$

$$- 2S = (1 + 3 + 6 + 10 + 15 - 15)$$

よって $-2S = (1 + 3 + 6 + 10 + 15 - 15)$

したがって $S = \frac{5}{2} \times 3^5 - \frac{3^5 - 1}{4} = 547$

群数列

数列 $\{a_n\}$ を何項かの群に分けたものを () という。区切りを " | " とする。

例 $1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 | 11, 12, 13, 14, 15 | \dots$
 () を第 n 群に入る数の個数が () 個になるように分けた群数列である。

例 $3, 6 | 9, 12, 15, 18 | 21, 24, 27, 30, 33, 36 | \dots$
 3の倍数を第 n 群に入る数の個数が () 個になるように分けた群数列である。

問題 B 正の偶数を第 n 群に n 個入るように分けた群数列について答えよ。

- この群数列を第 4 群まで書きなさい。
 $() | () | () | () | \dots$
- 第 n 群の末項までに入る数の個数を求めよ。
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = ()$
- 第 n 群の最初の数は何番目の数になるかを求めよ。
 第 $(n-1)$ 群の末項の次の数であるから $() + 1$
- 第 n 群の最初の数を求めよ。
- 第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

問題 C 正の奇数の数列を第 n 群に n 個入るように分けた群数列の第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。