



1. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項 $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
$S_n = n^2 + 2n$  $n = 1$ のとき、  $a_1 = S_1$  $= 1^2 + 2 \times 1$  $= 3$  $n \geq 2$ のとき、  $S_{n-1}$  $= (n-1)^2 + 2(n-1)$  $= n^2 - 2n + 1 + 2n - 2$  $= n^2 - 1$    $a_n = S_n - S_{n-1}$  $= (n^2 + 2n) - (n^2 - 1)$  $= 2n + 1$    $a_n = 2n + 1$ は $n=1$ のときも成り立つ。  よって、  <u><math>a_n = 2n + 1</math></u>	

2. 次の数列の階差数列はどんな数列か。  
What is the difference sequence of the following sequence?

例題	問題
<div>1, 3, 6, 12, 17, ...</div> <div></div> <div>初項 2, 公差 1 の 等差数列</div>	

3. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ。  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
<div>1, 7, 15, 25, 41, ...</div> <div></div> <div>この数列の階差数列<math>b_n</math>は  <math>b_n = 4n</math>である。  <math>n \geq 2</math> のとき、  <math>a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k</math>  <math>= 1 + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)n</math>  <math>= 1 + 2(n-1)n</math>  <math>= 2n^2 - 2n + 1</math>  この式は <math>n=1</math> のときも 成り立つ。  よって、  <u><math>a_n = 2n^2 - 2n + 1</math></u></div>	<div>1, 3, 7, 13, 21, ...</div>

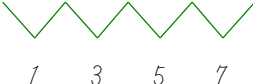
4. 次の数列の和 $S$ を求めよ。  
Find the sum  $S$  of the following sequence.

例題	問題
<div><math>\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}</math> より、 <math>\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}</math> を求めよ。  <math>S = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2n+1}</math> <math>= \frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}</math></div>	<div><math>\frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}</math> より、 <math>\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}</math> を求めよ。</div>


1. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項 $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
$S_n = 3^n - 1$  $n = 1$ のとき,  $a_1 = S_1$  $= 3^1 - 1$  $= 2$    $n \geq 2$ のとき,  $S_{n-1}$  $= 3^{n-1} - 1$    $a_n = S_n - S_{n-1}$  $= (3^n - 1)$  $- (3^{n-1} - 1)$  $= 3^n - 3^{n-1}$  $= (3 - 1) \times 3^{n-1}$  $= 2 \times 3^{n-1}$    $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。  よって,  <u><math>a_n = 2 \times 3^{n-1}</math></u>	$S_n = 4^n - 1$

2. 次の数列の階差数列はどんな数列か。  
What is the difference sequence of the following sequence?

例題	問題
$1, 2, 5, 10, 17, \dots$   初項1, 公差2 の 等差数列	$1, 4, 9, 16, 25, \dots$

3. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ。  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
$1, 3, 7, 13, 21, \dots$   この数列の階差数列 $b_n$ は  $b_n = 2n$ である。  $n \geq 2$ のとき,  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$  $= 1 + 2 \times \frac{1}{2} (n-1)n$  $= 1 + (n-1)n$  $= n^2 - n + 1$  この式は $n = 1$ のときも 成り立つ。  よって,  <u><math>a_n = n^2 - n + 1</math></u>	$0, 4, 12, 24, 30, \dots$

4. 次の数列の和 $S$ を求めよ。  
Find the sum  $S$  of the following sequence.

例題	問題
$\frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}$ より,  $\frac{3}{1 \times 4} + \frac{3}{4 \times 7} + \frac{3}{7 \times 10} + \dots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$ を求めよ。  $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{3n+1}$  $= \frac{3n+1}{3n+1} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n}{3n+1}$	$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}$ より,  $\frac{4}{1 \times 5} + \frac{4}{5 \times 9} + \frac{4}{9 \times 13} + \dots + \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ を求めよ。

1. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が与えられて  
いるとき，一般項 $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
$S_n = \frac{n}{n+1}$ <p><math>n=1</math> のとき，</p> $a_1 = S_1$ $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ <p><math>n \geq 2</math> のとき，</p> $S_{n-1} = \frac{n-1}{n-1+1}$ $= \frac{n-1}{n}$ $a_n = S_n - S_{n-1}$ $= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$ $= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{(n+1)n}$ $= \frac{1}{n(n+1)}$ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ <p><math>n=1</math>のときも成り立つ。</p> <p>よって，</p> $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$	$S_n = \frac{2n}{2n+1}$

2. 次の数列の階差数列はどんな数列か。  
What is the difference sequence of the following sequence?

例題	問題
<p>0, 1, 3, 7, 15,...</p> <p>1 2 4 8</p> <p>初項1，公比2の 等比数列</p>	<p>1, 2, 5, 14, 41,...</p>

3. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ。  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題	問題
<p>0, 3, 12, 39, 120,...</p> <p>3 9 27 81</p> <p>この数列の階差数列<math>b_n</math>は</p> $b_n = 3^n$ である。 $n \geq 2$ のとき，a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k $= 0 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$ $= \frac{3^n - 3}{2}$ <p>この式は<math>n=1</math>のときも 成り立つ。</p> <p>よって，</p> $a_n = \frac{3^n - 3}{2}$	<p>1, 3, 7, 15, 31,...</p>

4. 次の数列の和 $S$ を求めよ。  
Find the sum  $S$  of the following sequence.

例題	問題
$\frac{3}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}$ より， $\frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{3}{8 \times 11} + \cdots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$ を求めよ。 $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{3n+2}$ $= \frac{3}{6} \frac{n+2}{n+4} - \frac{2}{6} \frac{2}{n+4} = \frac{3}{6} \frac{n}{n+4}$	$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}$ より， $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$ を求めよ。

## 数学B 数列の和と一般項 課題

1. 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が与えられているとき、初項  $a_1$  から第 3 項  $a_3$  まで求めよ。

Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the first term to fourth term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

### 例題 $S_n = 2n^2 - n$

$$a_1 = S_1=2 \times 1^2-1=1$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (2 \times 2^2 - 2) - (2 \times 1^2 - 1) = 5$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (2 \times 3^2 - 3) - (2 \times 2^2 - 2) = 9$$

もんだい  
 問題  $S_n = n^2 + n$

2. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が与えられているとき、一般項 $a_n$ を求めよ。

Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題  $S_n = 2n^2 - n$

$n = 1$  のとき,  $a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

$n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 2(n-1)^2 - (n-1) \\ &= 2n^2 - 4n + 2 - n + 1 = 2n^2 - 5n + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - (2(n-1)^2 - (n-1) + 3) \\ &= 4n - 3 \end{aligned}$$

$a_n = 4n - 3$  は  $n = 1$  のときも成り立つ。

もんだい  
 問題  $S_n = n^2 + n$

3. 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が与えられているとき、初項  $a_1$  から第 3 項  $a_3$  まで求めよ。

Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the first term to fourth term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題  $S_n = 3^n - 1$

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (3^2 - 1) - (3^1 - 1) = 6$$

$$a_3 = S_3 - S_2 = (3^3 - 1) - (3^2 - 1) = 18$$

もんだい  
 問題  $S_n = 2^n - 1$

4. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項 $a_n$ を求めよ。

Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence  $\{a_n\}$ .  
Find the  $n$ -th term of the following sequence  $\{a_n\}$ .

例題  $S_n = 3^n - 1$

$n = 1$  のとき,  $\alpha_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

2014

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \binom{n}{1} - \binom{n-1}{1}$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$$

$a_n = 2 \times 3^{n-1}$  は  $n=1$  のときも成り立つ。

もんだい  
問題  $S_n = 2^n - 1$

1. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、初項  $a_1$  から第 4 項  $a_4$ まで求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the first term to fourth term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題  $S_n = n^2 - 3 n$

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2$$
$$a_2 = S_2 - S_1 = (2^2 - 3 \times 2) - (1^2 - 3 \times 1) = 0$$
$$a_3 = S_3 - S_2 = (3^2 - 3 \times 3) - (2^2 - 3 \times 2) = 2$$
$$a_4 = S_4 - S_3 = (4^2 - 3 \times 4) - (3^2 - 3 \times 3) = 4$$

問題  $S_n = n^2 + 2 n$

2. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項  $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the  $n$ -th term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題  $S_n = n^2 - 3 n$

$$n = 1 \text{ のとき, } a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2$$
$$n \geq 2 \text{ のとき,}$$
$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 3 (n-1)$$
$$= n^2 - 2 n + 1 - 3 n + 3 = n^2 - 5 n + 4$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2 - 3 n) - (n^2 - 5 n + 4)$$
$$= 2 n - 4$$

$a_n = 2 n - 4$  は  $n = 1$  のときも成り立つ。

問題  $S_n = n^2 + 2 n$

3. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、初項  $a_1$  から第 4 項  $a_4$ まで求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the first term to fourth term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題  $S_n = 4^n$

$$a_1 = S_1 = 4^1 = 4$$
$$a_2 = S_2 - S_1 = 4^2 - 4^1 = 12$$
$$a_3 = S_3 - S_2 = 4^3 - 4^2 = 48$$
$$a_4 = S_4 - S_3 = 4^4 - 4^3 = 192$$

問題  $S_n = 2^n$

4. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項  $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the  $n$ -th term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題  $S_n = 4^n$

$$n = 1 \text{ のとき, } a_1 = S_1 = 4^1 = 4$$
$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1}$$
$$= 4 \times 3^{n-1} - 4^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$$

よって  $a_1 = 4$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 3 \times 4^{n-1}$$

問題  $S_n = 2^n$

1. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項  $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the  $n$ -th term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題

$$S_n = \frac{n}{6n + 4}$$
$$n = 1 \text{ のとき,}$$
$$a_1 = S_1 = \frac{1}{6 \times 1 + 4} = \frac{1}{10}$$
$$n \geq 2 \text{ のとき,}$$
$$S_{n-1} = \frac{n-1}{6(n-1) + 4} = \frac{n-1}{6n-2}$$
$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{6n+4} - \frac{n-1}{6n-2}$$
$$= \frac{n(6n-2) - (n-1)(6n+4)}{(6n+4)(6n-2)}$$
$$= \frac{4}{(6n+4)(6n-2)} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

この式は  $n=1$  のときも成り立つ。よって,

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

問題

$$S_n = \frac{n}{3n + 1}$$

2. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、初項  $a_1$  から第 3 項  $a_3$ まで求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the first term to third term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題

$$S_n = 2n^2 - 4n$$
$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = -2$$
$$a_2 = S_2 - S_1$$
$$= (2 \times 2^2 - 4 \times 2) - (2 \times 1^2 - 4 \times 1) = 2$$
$$a_3 = S_3 - S_2$$
$$= (2 \times 3^2 - 4 \times 3) - (2 \times 2^2 - 4 \times 2) = 6$$

問題

$$S_n = 3n^2 - n$$

3. 数列{ $a_n$ }の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$ が与えられて  
いるとき、一般項  $a_n$ を求めよ。  
Given the sum  $S_n$  from the first term to the  $n$ -th term of the sequence {  $a_n$  }.  
Find the  $n$ -th term of the following sequence {  $a_n$  }.

例題

$$S_n = 2n^2 - 4n$$
$$n = 1 \text{ のとき, } a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = -2$$
$$n \geq 2 \text{ のとき,}$$
$$S_{n-1} = 2 \times (n-1)^2 - 4(n-1)$$
$$= 2n^2 - 4n + 2 - 4n + 4 = 2n^2 - 8n + 6$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (2n^2 - 4n) - (2n^2 - 8n + 6) = 4n - 6$$

この式は  $n=1$  のときも成り立つ。

よって  $a_n = 4n - 6$

問題

$$S_n = 3n^2 - n$$

1. 次の数列{a<sub>n</sub>}の階差数列{b<sub>n</sub>}を求めよ。  
Find the difference sequence {b<sub>n</sub>} of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

2, 3, 4, 5, 6, 7

初項2, 公差1の等差数列であるから

b<sub>n</sub> = 2 + (n - 1) × 1 = n + 1

問題

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, ...

2. 次の数列{a<sub>n</sub>}の一般項 a<sub>n</sub>を求めよ。  
Find the n-th term a<sub>n</sub> of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

階差数列{b<sub>n</sub>}は b<sub>n</sub> = n + 1 であるから

n ≥ 2 のとき,

a<sub>n</sub> = a<sub>1</sub> + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> b<sub>k</sub> = 1 + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> (k + 1)

= 1 + 1/2 (n - 1) n + (n - 1)

= 1/2 n (n + 1)

1/2 n (n + 1) に n = 1 を代入すると a<sub>1</sub> = 1

n = 1 のときも成り立つので

一般項は a<sub>n</sub> = 1/2 n (n + 1)

問題

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, ...

3. 次の数列{a<sub>n</sub>}の階差数列{b<sub>n</sub>}を求めよ。  
Find the difference sequence {b<sub>n</sub>} of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 2, 5, 14, 41, 122, ...

1, 3, 9, 27, 81

初項1, 公比3の等比数列であるから

b<sub>n</sub> = 1 × 3<sup>n-1</sup> = 3<sup>n-1</sup>

問題

2, 3, 5, 9, 17, 33, ...

4. 次の数列{a<sub>n</sub>}の一般項 a<sub>n</sub>を求めよ。  
Find the n-th term a<sub>n</sub> of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 2, 5, 14, 41, 122, ...

階差数列{b<sub>n</sub>}は b<sub>n</sub> = 3<sup>n-1</sup> であるから

n ≥ 2 のとき,

a<sub>n</sub> = a<sub>1</sub> + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> b<sub>k</sub> = 1 + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> 3<sup>k-1</sup>

= 1 + (3<sup>n-1</sup> - 1) / (3 - 1) = (3<sup>n-1</sup> + 1) / 2

(3<sup>n-1</sup> + 1) / 2 に n = 1 を代入すると a<sub>1</sub> = 1

n = 1 のときも成り立つので

一般項は a<sub>n</sub> = (3<sup>n-1</sup> + 1) / 2

問題

2, 3, 5, 9, 17, 33, ...

1. 次の数列{a<sub>n</sub>}の階差数列{b<sub>n</sub>}を求めよ。  
Find the difference sequence {b<sub>n</sub>} of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 2, 6, 13, 23, 36, ...

1, 4, 7, 10, 13,

初項1, 公差3の等差数列であるから

b<sub>n</sub> = 1 + (n - 1) × 3 = 3n - 2

問題

2, 3, 6, 11, 18, 27, ...

2. 次の数列{a<sub>n</sub>}の一般項 a<sub>n</sub>を求めよ。  
Find the n-th term a<sub>n</sub> of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

1, 2, 6, 13, 23, 36, ...

階差数列{b<sub>n</sub>}は b<sub>n</sub> = 3n - 2 であるから

n ≥ 2 のとき,

a<sub>n</sub> = a<sub>1</sub> + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> b<sub>k</sub> = 1 + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> (3k - 2)

= 1 + 3 ×  $\frac{1}{2}(n-1)n - 2(n-1)$

=  $\frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$

$\frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$  に n = 1 を代入すると a<sub>1</sub> = 1

n = 1 のときも成り立つので

一般項は a<sub>n</sub> =  $\frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$

問題

2, 3, 6, 11, 18, 27, ...

3. 次の数列{a<sub>n</sub>}の階差数列{b<sub>n</sub>}を求めよ。  
Find the difference sequence {b<sub>n</sub>} of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

0, 2, 8, 26, 80, ...

2, 6, 18, 54

初項2, 公比3の等比数列であるから

b<sub>n</sub> = 2 × 3<sup>n-1</sup>

問題

1, 4, 10, 22, 46, ...

4. 次の数列{a<sub>n</sub>}の一般項 a<sub>n</sub>を求めよ。  
Find the n-th term a<sub>n</sub> of the following sequence {a<sub>n</sub>}.

例題

0, 2, 8, 26, 80, ...

階差数列{b<sub>n</sub>}は b<sub>n</sub> = 2 × 3<sup>n-1</sup> であるから

n ≥ 2 のとき,

a<sub>n</sub> = a<sub>1</sub> + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> b<sub>k</sub> = 1 + ∑<sub>k=1</sub><sup>n-1</sup> (2 × 3<sup>k-1</sup>)

= 1 +  $\frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$  = 3<sup>n-1</sup> - 1

3<sup>n-1</sup> - 1 に n = 1 を代入すると a<sub>1</sub> = 0

n = 1 のときも成り立つので

一般項は a<sub>n</sub> = 3<sup>n-1</sup> - 1

問題

1, 4, 10, 22, 46, ...



1. 次の数列{*a<sub>n</sub>*}の階差数列{*b<sub>n</sub>*}を求めよ。  
Find the difference sequence {*b<sub>n</sub>*} of the following sequence {*a<sub>n</sub>*}.

例題

2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

4, 6, 8, 10, 12,

初項4, 公差2の等差数列であるから

$$b_n = 4 + (n - 1) \times 2 = 2n + 2$$

問題

2, 4, 8, 14, 22, 32, ...

2. 次の数列{*a<sub>n</sub>*}の一般項 *a<sub>n</sub>*を求めよ。  
Find the *n*-th term *a<sub>n</sub>* of the following sequence {*a<sub>n</sub>*}.

例題

2, 6, 12, 20, 30, 42, ...

階差数列{*b<sub>n</sub>*}は  $b_n = 2n + 2$  であるから

$$n \geq 2$$
 のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 2)$$
$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2}(n - 1)n + 2(n - 1)$$
$$= n^2 + n$$

$n^2 + n$  に  $n = 1$  を代入すると  $a_1 = 2$

$n = 1$  のときも成り立つので

一般項は  $a_n = n^2 + n$

問題

2, 4, 8, 14, 22, 32, ...

3. 次の数列{*a<sub>n</sub>*}の階差数列{*b<sub>n</sub>*}を求めよ。  
Find the difference sequence {*b<sub>n</sub>*} of the following sequence {*a<sub>n</sub>*}.

例題

0, 3, 12, 39, 120, ...

3, 9, 27, 81

初項3, 公比の3等比数列であるから

$$b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

問題

0, 2, 6, 14, 30, ...

4. 次の数列{*a<sub>n</sub>*}の一般項 *a<sub>n</sub>*を求めよ。  
Find the *n*-th term *a<sub>n</sub>* of the following sequence {*a<sub>n</sub>*}.

例題

0, 3, 12, 39, 120, ...

階差数列{*b<sub>n</sub>*}は  $b_n = 3^n$  であるから

$$n \geq 2$$
 のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$
$$= 0 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

$\frac{3^n - 3}{2}$  に  $n = 1$  を代入すると  $a_1 = 0$

$n = 1$  のときも成り立つので

一般項は  $a_n = \frac{3^n - 3}{2}$

問題

0, 2, 6, 14, 30, ...

例題 1 から順に奇数を並べて、各群に 1 個, 3 個 5 個, 7 個, … と奇数になるように分ける。  
Arrange the odd numbers starting from 1, and divide them into groups so that each group contains odd numbers: 1, 3, 5, 7, etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |  
Write down groups 1 to 3. ※ The division is "|".

1 | 3 , 5 , 7 | 9 , 11 , 13 , 15 , 17 |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。  
Find the beginning and ending numbers of the fifth group.

第 4 群までの項の総数は  $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

第 5 群の始めの数は 17 番目の奇数 33 である。

※  $a_n = 2n - 1$ ,  $a_{17} = 2 \times 17 - 1 = 33$

第 5 群までの項の総数は  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

第 5 群の終わり数は 25 番目の奇数 49 である。

※  $a_n = 2n - 1$ ,  $a_{25} = 2 \times 25 - 1 = 49$

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。  
Find the sum of the numbers in the  $n$ -th group.

第  $n$  群までの項数は  $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

第  $n$  群までの和は

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)$$
$$= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \times \frac{1}{2} n^2 (n^2 - 1) - n^2$$
$$= n^4$$

$n \geq 2$  のとき、第  $n$  群の和は

$$n^4 - (n - 1)^4$$

この式は  $n = 1$  のときも成り立つ。

よって、第  $n$  群の和は  $n^4 - (n - 1)^4$

(4) 77 は第何群の何番目であるか。  
What group and what number is 77?

第  $n$  群の終わりの数は  $2n^2 - 1$  になる。

$$2(n - 1)^2 - 1 < 77 \leq 2n^2 - 1$$

したがって、第 7 群にある。

第 7 群の始めの数は  $6^2 + 1 = 37$  番目の奇数 73

第 7 群 は 73, 75, 77, …

77 は第 7 群の 3 番目である。

問題 2 から順に偶数を並べて、各群に 1 個, 3 個 5 個, 7 個, … と奇数になるように分ける。  
Arrange the even numbers starting from 2, and divide them into groups so that each group contains even numbers: 2, 4, 6, 8, etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。

(4) 80 は第何群の何番目であるか。

例題

2 から順 に偶数を並べて、各群に 2 個, 4 個 6 個, 8 個, … と偶数になるように分ける。  
Arrange the even numbers starting from 2, and divide them into groups so that each group contains even numbers: 2, 4, 6, 8, etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |  
Write down groups 1 to 3. ※ The division is "|".  
2, 4 | 6, 8, 10, 12 | 14, 16, 18, 20, 22, 24 |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。  
Find the beginning and ending numbers of the fifth group.  
第 4 群までの項の総数は  $2 + 4 + 6 + 8 = 20$   
第 5 群の始めの数は 21 番目の偶数 42 である。  
$$\text{※ } a_n = 2n, \quad a_{21} = 2 \times 21 = 42$$
第 5 群までの項の総数は  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$   
第 5 群の終わり数は 30 番目の偶数 60 である。  
$$\text{※ } a_n = 2n, \quad a_{30} = 2 \times 30 = 60$$

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。  
Find the sum of the numbers in the  $n$ -th group.  
第  $n$  群までの項数は  $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$   
第  $n$  群までの和は  $\sum_{k=1}^{n(n+1)} 2k = 2 \times \frac{1}{2} \{ n(n+1) \} \{ n(n+1) + 1 \}$   
$$= n(n+1)(n^2 + n + 1)$$
 $n \geq 2$  のとき、第  $n$  群の和は  $n(n+1)(n^2 + n + 1) - n(n-1)(n^2 - n + 1)$   
$$= 4n^3 + 2n$$
この式は  $n = 1$  のときも成り立つ。  
よって、第  $n$  群の和は  $4n^3 + 2n$

(4) 66 は第何群の何番目であるか。  
第  $n$  群の終わりの数は  $2n(n+1)$  になる。  
$$2n(n-1) < 66 \leq 2n(n+1)$$
したがって、第 6 群にある。  
第 6 群の始めの数は  $5(5+1) + 1 = 31$  番目  
の偶数 62  
第 6 群 は 62, 64, 66, …  
66 は第 6 群の 3 番目である。

問題

1 から順 に奇数を並べて、各群に 2 個, 4 個 6 個, 8 個, … と偶数になるように分ける。  
Arrange the odd numbers starting from 1, and divide them into groups so that each group contains even numbers: 2, 4, 6, 8, etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。

(4) 55 は第何群の何番目であるか。

例題 1 から順に奇数を並べて、各群に 1 個, 2 個 4 個, 8 個, ... と  $2^{n-1}$  個になるように分ける。  
Arrange the odd numbers starting from 1, and divide them into groups so that each group contains odd numbers: 1, 2, 4, 8, ...,  $2^{n-1}$ , etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |  
Write down groups 1 to 3. ※ The division is "|".

1 | 3 , 5 | 7 , 9 , 11 , 13 |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。  
Find the beginning and ending numbers of the fifth group.

第 4 群までの項の総数は  $1+2+4+8=15$

第 5 群の始めの数は 16 番目の奇数 31 である。

※  $a_n=2^{n-1}$ ,  $a_{16}=2 \times 16-1=31$

第 5 群までの項の総数は  $1+2+4+8+16=31$

第 5 群の終わり数は 31 番目の奇数 61 である。

※  $a_n=2^{n-1}$ ,  $a_{31}=2 \times 31-1=61$

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。  
Find the sum of the numbers in the  $n$ -th group.

第  $n$  群までの項数は  $\sum_{k=1}^n 2^{k-1}=2^n-1$

第  $n$  群までの和は  $\sum_{k=1}^n (2^k-1)=n^2$  より

$\sum_{k=1}^{n-1} (2^k-1)=(2^n-1)^2$

$n \geq 2$  のとき、第  $n$  群の和は

$(2^n-1)^2-(2^{n-1}-1)^2$

この式は  $n=1$  のときも成り立つ。

別解

第  $n$  群までの項数は  $\sum_{k=1}^n 2^{k-1}=2^n-1$  より

$n \geq 2$  のとき、第  $n$  群の最初の項は

$2^{n-1}-1+1=2^{n-1}$  番目の奇数  $2^n-1$  ,

第  $n$  群の末項は  $2^n-1$  番目の奇数

$2(2^n-1)-1=2^{n+1}-3$  ,

第  $n$  群の項数は  $2^{n-1}$

第  $n$  群は等差数列であるから、第  $n$  群の和は

$\frac{1}{2} \times 2^{n-1} \{ (2^n-1) + (2^{n+1}-3) \}$

$=2^{n-2} (3 \times 2^n-4)$

この式は  $n=1$  のときも成り立つ。

問題 2 から順に偶数を並べて、各群に 1 個, 2 個 4 個, 8 個, ... と  $2^{n-1}$  個になるように分ける。  
Arrange the even numbers starting from 2, and divide them into groups so that each group contains odd numbers: 1, 2, 4, 8, ...,  $2^{n-1}$ , etc.

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。 ※区切りは |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第  $n$  群に含まれる数の総和を求めよ。

れいだい

つぎ

すうれつ

わ

もと

例題① 次の数列の和  $S_n$ を求めよ。  
Find the sum  $S_n$  of the following sequence.

$$S_n= 1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 9+\cdots +n\cdot 3^{n-1}$$

$${}_3 S_n= 1\cdot 3+2\cdot 9+3\cdot 27+\cdots +n\cdot 3^n$$

$$S_n-{}_3 S_n= 1\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 9+\cdots +1\cdot 3^{n-1}-n\cdot 3^n$$

$$=\frac{3^n-1}{3-1}-n\cdot 3^n$$

$$=\frac{3^n-1-2n\cdot 3^n}{2}$$

$$=\frac{(1-2n)\times 3^n-1}{2}=-2S_n$$

$$S_n=\frac{(2n-1)\times 3^n+1}{4}$$

れいだい

つぎ

すうれつ

わ

もと

例題② 次の数列の和  $S_n$ を求めよ。  
Find the sum  $S_n$  of the following sequence.

$$S_n= 1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 9+\cdots +(2n-1)\cdot 3^{n-1}$$

$${}_3 S_n= 1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+\cdots +(2n-1)\cdot 3^n$$

$$S_n-{}_3 S_n= 1\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 9+\cdots +2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$= 1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$= 1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{2}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$= 1+3^n-3-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$= -(2n-2)\cdot 3^n-2=-2S_n$$

$$S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$$

もんだい

つぎ

すうれつ

わ

もと

問題① 次の数列の和  $S_n$ を求めよ。  
Find the sum  $S_n$  of the following sequence.

$$S_n= 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 4+\cdots +n\cdot 2^{n-1}$$

もんだい

つぎ

すうれつ

わ

もと

問題② 次の数列の和  $S_n$ を求めよ。  
Find the sum  $S_n$  of the following sequence.

$$S_n= 1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 4+\cdots +(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

れいだい  
例題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{1\times 3}, \frac{2}{3\times 5}, \cdots, \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

①

だい　こう　わ　もと  
の第  $n$  項( $n > 2$ )までの和を求めよ。  
Find the sum up to the  $n$ -th term ( $n>2$ ).

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$
とおく。

りょうへん　か  
両　辺に  $(2n-1)(2n+1)$  を掛けて

$$2 = (2n+1)A + (2n-1)B$$

$$n = \frac{1}{2}$$
を代入して  $2 = 2A \quad \therefore A = 1$

$$n = -\frac{1}{2}$$
を代入して  $2 = -2B \quad \therefore B = -1$

$n > 2$ のときの第  $n$  項までの和は

$$\frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

もんだい  
問題

すうれつ  
数列

$\frac{3}{1\times 4}, \frac{3}{4\times 7}, \cdots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

①

だい　こう　わ　もと  
の第  $n$  項( $n > 2$ )までの和を求めよ。

れいだい  
例題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{1\times 3}, \frac{2}{2\times 4}, \frac{2}{3\times 5}, \cdots, \frac{2}{n(n+2)}$

②

だい　こう　わ　もと  
の第  $n$  項( $n > 2$ )までの和を求めよ。  
Find the sum up to the  $n$ -th term ( $n>2$ ).

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$
とおく。

りょうへん　か  
両　辺に  $n(n+2)$  を掛けて  $2 = (n+2)A + nB$

$$n = 0$$
 を代入して  $2 = 2A \quad \therefore A = 1$

$$n = -2$$
を代入して  $2 = -2B \quad \therefore B = -1$

$n > 2$ のときの第  $n$  項までの和は

$$\frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{2\times 4} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{n(n+2)}$$

$$= \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

もんだい  
問題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{2\times 4}, \frac{2}{3\times 5}, \frac{2}{4\times 6}, \cdots, \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

②

だい　こう　わ　もと  
の第  $n$  項( $n > 2$ )までの和を求めよ。

例題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{3 \times 5}, \frac{2}{5 \times 7}, \cdots, \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

①

だい  
の第  $n$  項

こう  
( $n > 2$ )

わ  
までの和

もと  
を求めよ。

Find the sum up to the  $n$ -th term ( $n > 2$ ).

$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3}$

とおく。

りょうへん  
両 辺

に

$(2n+1)(2n+3)$

を掛けて

$2 = (2n+3)A + (2n+1)B$

$n = -\frac{1}{2}$

を代入して

$2 = 2A$

$\therefore A = 1$

$n = -\frac{3}{2}$

を代入して

$2 = -2B$

$\therefore B = -1$

$n > 2$ のとき

の第  $n$  項

までの和

は

$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

$= \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right.$

$\left. + \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}$

問題

すうれつ  
数列

$\frac{3}{2 \times 5}, \frac{3}{5 \times 8}, \cdots, \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$

①

だい  
の第  $n$  項

こう  
( $n > 2$ )

わ  
までの和

もと  
を求めよ。

例題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{3 \times 5}, \frac{2}{4 \times 6}, \frac{2}{5 \times 7}, \cdots, \frac{2}{(n+2)(n+4)}$

②

だい  
の第  $n$  項

こう  
( $n > 2$ )

わ  
までの和

もと  
を求めよ。

Find the sum up to the  $n$ -th term ( $n > 2$ ).

$\frac{2}{(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+4}$

とおく。

$(n+2)(n+4)$

を掛けて

$2 = (n+4)A + (n+2)B$

$n = -2$

を代入して

$2 = 2A$

$\therefore A = 1$

$n = -4$

を代入して

$2 = -2B$

$\therefore B = -1$

$n > 2$ のとき

の第  $n$  項

までの和

は

$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{5 \times 6} + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+4)}$

$= \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right.$

$\left. + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right) \right\}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$

問題

すうれつ  
数列

$\frac{2}{5 \times 7}, \frac{2}{6 \times 8}, \frac{2}{7 \times 9}, \cdots, \frac{2}{(n+4)(n+6)}$

②

だい  
の第  $n$  項

こう  
( $n > 2$ )

わ  
までの和

もと  
を求めよ。