数学B　いろいろな数列の和　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

Given the sum Sn from the first term to the nth term of the sequence { a_n }.
Find the nth term of the following sequence { a_n }.

例題

$S_n = n^2 + 2n$

$n = 1$ のとき，

$a_1 = S_1$

$= 1^2 + 2 \times 1$

$= 3$

$n \geqq 2$ のとき，

S_{n-1}

$= (n-1)^2 + 2(n-1)$

$= n^2 - 2n + 1 + 2n - 2$

$= n^2 - 1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 2n)$

$\quad - (n^2 - 1)$

$= 2n + 1$

$a_n = 2n + 1$ は

$n = 1$のときも成り立つ。

よって，

$\underline{\underline{a_n = 2n + 1}}$

問題

$S_n = n^2 - n$

2．次の数列の階差数列はどんな数列か。

What is the difference sequence of the following sequence?

例題

1,　3,　6,　12,　17,・・・

2　3　4　5

初項 2，　公差 1 の

等差数列

問題

2,　4,　8,　14,　22,・・・

3．次の数列$\{a_n\}$ の一般項 a_nを求めよ。

Find the nth term of the following sequence { a_n }.

例題

1,　7,　15,　25,　41,・・・

4　8　12　16

この数列の階差数列 b_nは

$b_n = 4n$ である。

$n \geqq 2$ のとき，

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4n$

$= 1 + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)n$

$= 1 + 2(n-1)n$

$= 2n^2 - 2n + 1$

この式は $n = 1$のときも

成り立つ。

よって，

$\underline{\underline{a_n = 2n^2 - 2n + 1}}$

問題

1,　3,　7,　13,　21,・・・

4．次の数列の和 S を求めよ。

Find the sum S of the following sequence.

例題　$\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}$ より，

$\dfrac{2}{1\times3} + \dfrac{2}{3\times5} + \dfrac{2}{5\times7} + \cdots + \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

を求めよ。

$S = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \cdots - \dfrac{1}{2n+1}$

$= \dfrac{2n+1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+1} = \underline{\underline{\dfrac{2n}{2n+1}}}$

問題　$\dfrac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \dfrac{1}{3k-2} - \dfrac{1}{3k+1}$ より，

$\dfrac{3}{1\times4} + \dfrac{3}{4\times7} + \dfrac{3}{7\times10} + \cdots + \dfrac{3}{(3n-2)(3n+1)}$

を求めよ。

数学B　いろいろな数列の和 2 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題	問題
$S_n = 3^n - 1$ $n = 1$ のとき， $a_1 = S_1$ $= 3^1 - 1$ $= 2$ $n \geqq 2$ のとき， S_{n-1} $= 3^{n-1} - 1$ $a_n = S_n - S_{n-1}$ $= (3^n - 1)$ $-(3^{n-1} - 1)$ $= 3^n - 3^{n-1}$ $= (3-1) \times 3^{n-1}$ $= 2 \times 3^{n-1}$ $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。 よって， $a_n = 2 \times 3^{n-1}$	$S_n = 4^n - 1$

2．次の数列の階差数列はどんな数列か。

例題	問題
1,　2,　5,　10,　17,･･･ 1　3　5　7 初項 1,　公差 2 の 等差数列	1,　4,　9,　16,　25,･･･

3．次の数列$\{a_n\}$ の一般項 a_nを求めよ。

例題	問題
1,　3,　7,　13,　21,･･･ 2　4　6　8 この数列の階差数列 b_nは $b_n = 2n$ である。 $n \geqq 2$ のとき， $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$ $= 1 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n$ $= 1 + (n-1)n$ $= n^2 - n + 1$ この式は $n=1$ のときも 成り立つ。 よって， $a_n = n^2 - n + 1$	0,　4,　12,　24,　30,･･･

4．次の数列の和 S を求めよ。

例題　$\frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}$ より，

$$\frac{3}{1\times4} + \frac{3}{4\times7} + \frac{3}{7\times10} + \cdots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$$

を求めよ。

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{3n+1}$$
$$= \frac{3n+1}{3n+1} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n}{3n+1}$$

問題　$\frac{4}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1}$ より，

$$\frac{4}{1\times5} + \frac{4}{5\times9} + \frac{4}{9\times13} + \cdots + \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

を求めよ。

数学B　いろいろな数列の和 3 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

$n=1$ のとき，

$$a_1=S_1$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$S_{n-1}=\frac{n-1}{n-1+1}$$

$$=\frac{n-1}{n}$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}$$

$$=\frac{n^2-(n-1)(n+1)}{(n+1)n}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

$n=1$ のときも成り立つ。

よって，

$$\underline{\underline{a_n=\frac{1}{n(n+1)}}}$$

問題

$$S_n=\frac{2n}{2n+1}$$

2．次の数列の階差数列はどんな数列か。

例題

0,　1,　3,　7,　15,$\cdots$

1　2　4　8

初項 1，公比 2 の

等比数列

問題

1,　2,　5,　14,　41,$\cdots$

3．次の数列$\{a_n\}$ の一般項 a_nを求めよ。

例題

0,　3,　12,　39,　120,$\cdots$

3　9　27　81

この数列の階差数列 b_nは

$b_n=3^n$ である。

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k$$

$$=0+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=\frac{3^n-3}{2}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，

$$\underline{\underline{a_n=\frac{3^n-3}{2}}}$$

問題

1,　3,　7,　15,　31,$\cdots$

4．次の数列の和 S を求めよ。

例題 $\dfrac{3}{(3k-1)(3k+2)}=\dfrac{1}{3k-1}-\dfrac{1}{3k+2}$ より，

$$\frac{3}{2\times5}+\frac{3}{5\times8}+\frac{3}{8\times11}+\cdots+\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$$

を求めよ。

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots-\frac{1}{3n+2}$$

$$=\frac{3n+2}{6n+4}-\frac{2}{6n+4}=\underline{\underline{\frac{3n}{6n+4}}}$$

問題 $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}$ より，

$$\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\frac{2}{7\times9}+\cdots+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

を求めよ。

数学B　数列の和と一般項　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，初項 a_1 から第 3 項 a_3まで求めよ。

例題　$S_n = 2n^2 - n$

$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

$a_2 = S_2 - S_1 = (2 \times 2^2 - 2) - (2 \times 1^2 - 1) = 5$

$a_3 = S_3 - S_2 = (2 \times 3^2 - 3) - (2 \times 2^2 - 2) = 9$

問題　$S_n = n^2 + n$

2．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = 2n^2 - n$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき，

$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1)$

$= 2n^2 - 4n + 2 - n + 1 = 2n^2 - 5n + 3$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2n^2 - n) - (2n^2 - 5n + 3)$

$= 4n - 3$

$a_n = 4n - 3$ は $n=1$ のときも成り立つ。

問題　$S_n = n^2 + n$

3．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，初項 a_1 から第 3 項 a_3まで求めよ。

例題　$S_n = 3^n - 1$

$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

$a_2 = S_2 - S_1 = (3^2 - 1) - (3^1 - 1) = 6$

$a_3 = S_3 - S_2 = (3^3 - 1) - (3^2 - 1) = 18$

問題　$S_n = 2^n - 1$

4．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = 3^n - 1$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

$n \geqq 2$ のとき，

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$

$= 3^n - 3^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

$a_n = 2 \times 3^{n-1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

問題　$S_n = 2^n - 1$

数学B　数列の和と一般項 2 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，初項 a_1 から第 4 項 a_4まで求めよ。

例題　$S_n = n^2 - 3n$

$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2$

$a_2 = S_2 - S_1 = (2^2 - 3 \times 2) - (1^2 - 3 \times 1) = 0$

$a_3 = S_3 - S_2 = (3^2 - 3 \times 3) - (2^2 - 3 \times 2) = 2$

$a_4 = S_4 - S_3 = (4^2 - 3 \times 4) - (3^2 - 3 \times 3) = 4$

問題　$S_n = n^2 + 2n$

2．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = n^2 - 3n$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2$

$n \geqq 2$ のとき，

$S_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1)$

$= n^2 - 2n + 1 - 3n + 3 = n^2 - 5n + 4$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4)$

$= 2n - 4$

$a_n = 2n - 4$ は $n=1$ のときも成り立つ。

問題　$S_n = n^2 + 2n$

3．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，初項 a_1 から第 4 項 a_4まで求めよ。

例題　$S_n = 4^n$

$a_1 = S_1 = 4^1 = 4$

$a_2 = S_2 - S_1 = 4^2 - 4^1 = 12$

$a_3 = S_3 - S_2 = 4^3 - 4^2 = 48$

$a_4 = S_4 - S_4 = 4^3 - 4^2 = 192$

問題　$S_n = 2^n$

4．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = 4^n$

$n = 1$ のとき，$a_1 = S_1 = 4^1 = 4$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1}$

$= 4 \times 3^{n-1} - 4^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$

よって　$a_1 = 4$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = 3 \times 4^{n-1}$

問題　$S_n = 2^n$

数学B　数列の和と一般項 3 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = \dfrac{n}{6n+4}$

$n=1$ のとき，

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{6\times1+4} = \frac{1}{10}$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$S_{n-1} = \frac{n-1}{6(n-1)+4} = \frac{n-1}{6n-2}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{6n+4} - \frac{n-1}{6n-2}$$

$$= \frac{n(6n-2)-(n-1)(6n+4)}{(6n+4)(6n-2)}$$

$$= \frac{4}{(6n+4)(6n-2)} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。よって，

$$a_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

問題　$S_n = \dfrac{n}{3n+1}$

2．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，初項 a_1 から第 3 項 a_3まで求めよ。

例題　$S_n = 2n^2 - 4n$

$a_1 = S_1 = 2\times1^2 - 4\times1 = -2$

$a_2 = S_2 - S_1$

$\quad = (2\times2^2 - 4\times2) - (2\times1^2 - 4\times1) = 2$

$a_3 = S_3 - S_2$

$\quad = (2\times3^2 - 4\times3) - (2\times2^2 - 4\times2) = 6$

問題　$S_n = 3n^2 - n$

3．数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_nが与えられているとき，一般項 a_nを求めよ。

例題　$S_n = 2n^2 - 4n$

$n=1$ のとき，$a_1 = S_1 = 2\times1^2 - 4\times1 = -2$

$n \geqq 2$ のとき，

$S_{n-1} = 2\times(n-1)^2 - 4(n-1)$

$\quad = 2n^2 - 4n + 2 - 4n + 4 = 2n^2 - 8n + 6$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$\quad = (2n^2 - 4n) - (2n^2 - 8n + 6) = 4n - 6$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。よって

$a_n = 4n - 6$

問題　$S_n = 3n^2 - n$

数学B　階差数列　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　1， 3， 6， 10，15，21，28，・・・

2， 3， 4， 5， 6， 7

初項 2, 公差 1 の等差数列であるから

$b_n = 2 + (n-1) \times 1 = n + 1$

問題　1， 2， 5， 10，17，26，37，・・・

2．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　1， 3， 6， 10，15，21，28，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = n + 1$　であるから

$n \geqq 2$ のとき，

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)$

$= \frac{1}{2}n(n+1)$

$\frac{1}{2}n(n+1)$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 1$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

問題　1，2，5，10，17，26，37，・・・

3．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　1， 2， 5， 14，41，122，・・・

1， 3， 9， 27，81

初項 1, 公比 3 の等比数列であるから

$b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$

問題　2， 3， 5， 9， 17，33，・・・

4．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　1， 2， 5， 14，41，122，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = 3^{n-1}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき，

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$= 1 + \frac{3^{n-1}-1}{3-1} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$

$\frac{3^{n-1}+1}{2}$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 1$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$

問題　2，3，5，9，17，33，・・・

数学B　階差数列 2 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　1， 2， 6， 13，23，36，・・・

　　1， 4， 7， 10， 13，

初項 1, 公差 3 の等差数列であるから

$b_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

問題　2， 3， 6，11，18，27，・・・

2．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　1，2，6，13，23，36，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = 3n - 2$　であるから

$n \geqq 2$ のとき,

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$

$= 1 + 3 \times \frac{1}{2}(n-1)n - 2(n-1)$

$= \frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$

$\frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 1$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$

問題　2，3，6，11，18，27，・・・

3．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　0， 2， 8， 26，80，・・・

　　2， 6， 18，54

初項 2, 公比 3 の等比数列であるから

$b_n = 2 \times 3^{n-1}$

問題　1， 4， 10，22，46，・・・

4．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　0，2，8，26，80，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = 2 \times 3^{n-1}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき,

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2 \times 3^{k-1})$

$= 0 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1} - 1$

$3^{n-1} - 1$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 0$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = 3^{n-1} - 1$

問題　1，4，10，22，46，・・・

数学B　階差数列 3 課題　　　　　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　2，6，12，20，30，42，・・・

　　4，6，8，10，12，

初項 4, 公差 2 の等差数列であるから

$b_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2$

問題　2，4，8，14，22，32，・・・

3．次の数列$\{a_n\}$の階差数列$\{b_n\}$を求めよ。

例題　0，3，12，39，120，・・・

　　3，9，27，81

初項 3, 公比の 3 等比数列であるから

$b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

問題　0，2，6，14，30，・・・

2．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　2，6，12，20，30，42，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = 2n + 2$　であるから

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 2)$$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1)$$

$$= n^2 + n$$

$n^2 + n$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 2$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = n^2 + n$

問題　2，4，8，14，22，32，・・・

4．次の数列$\{a_n\}$の一般項 a_nを求めよ。

例題　0，3，12，39，120，・・・

階差数列$\{b_n\}$は　$b_n = 3^n$ であるから

$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$= 0 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 3}{2}$$

$\frac{3^n - 3}{2}$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 0$

$n=1$ のときも成り立つので

一般項は $a_n = \frac{3^n - 3}{2}$

問題　0，2，6，14，30，・・・

数学B　群数列　課題　　　　　　　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　1から順に奇数を並べて，各群に1個，3個，5個，7個，･･･と奇数になるように分ける。

(1) 第1群から第3群まで書きなさい。　※区切りは｜

1 ｜ 3 , 5 , 7 ｜ 9 , 11 , 13 , 15 , 17 ｜

(2) 第5群の始めと終わりの数を求めよ。

第4群までの項の総数は $1+3+5+7=16$

第5群の始めの数は17番目の奇数33である。

※ $a_n = 2n-1,\quad a_{17} = 2\times 17-1=33$

第5群までの項の総数は $1+3+5+7+9=25$

第5群の終わり数は25番目の奇数49である。

※ $a_n = 2n-1,\quad a_{25} = 2\times 25-1=49$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 n 群までの項数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

第 n 群までの和は

$$\sum_{k=1}^{n^2}(2k-1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n^2}k-\sum_{k=1}^{n^2}1=2\times\frac{1}{2}n^2(n^2-1)-n^2$$

$$=n^4$$

$n\geqq 2$ のとき，第 n 群の和は

$n^4-(n-1)^4$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，第 n 群の和は $n^4-(n-1)^4$

(4) 77は第何群の何番目であるか。

第 n 群の終わりの数は $2n^2-1$ になる。

$2(n-1)^2-1<77\leqq 2n^2-1$

したがって，第7群にある。

第7群の始めの数は $6^2+1=37$ 番目の奇数73

第7群 は 73, 75, 77, ･･･

77は第7群の3番目である。

問題　2から順に偶数を並べて，各群に1個，3個，5個，7個，･･･と奇数になるように分ける。

(1) 第1群から第3群まで書きなさい。　※区切りは｜

(2) 第5群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

(4) 80は第何群の何番目であるか。

数学B　群数列 2 課題　　　　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　2から順に偶数を並べて，各群に 2 個，4 個，6 個，8 個，･･･と偶数になるように分ける。

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。　※区切りは｜

2 , 4 ｜ 6 , 8 , 10, 12 |14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 |

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

第 4 群までの項の総数は $2+4+6+8=20$

第 5 群の始めの数は 21 番目の偶数 42 である。

※ $a_n=2n$,　$a_{21}=2\times 21=42$

第 5 群までの項の総数は $2+4+6+8+10=30$

第 5 群の終わり数は 30 番目の偶数 60 である。

※ $a_n=2n$,　$a_{30}=2\times 30=60$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 n 群までの項数は $\sum_{k=1}^{n} 2k=n(n+1)$

第 n 群までの和は

$$\sum_{k=1}^{n(n+1)} 2k=2\times\frac{1}{2}\{n(n+1)\}\{n(n+1)+1\}$$

$=n(n+1)(n^2+n+1)$

$n\geqq 2$ のとき，第 n 群の和は

$n(n+1)(n^2+n+1)-n(n-1)(n^2-n+1)$

$=4n^3+2n$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，第 n 群の和は $4n^3+2n$

(4) 66 は第何群の何番目であるか。

第 n 群の終わりの数は $2n(n+1)$ になる。

$2n(n-1)<66\leqq 2n(n+1)$

したがって，第 6 群にある。

第 6 群の始めの数は $5(5+1)+1=31$ 番目の偶数 62

第 6 群 は 62, 64, 66, ･･･

66 は第 6 群の 3 番目である。

問題　1から順に奇数を並べて，各群に 2 個，4 個，6 個，8 個･･･と偶数になるように分ける。

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。　※区切りは｜

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

(4) 55 は第何群の何番目であるか。

例題　1 から順に奇数を並べて，各群に 1 個, 2 個 4 個, 8 個,・・・と 2^{n-1}個になるように分ける。

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。　※区切りは｜

1 ｜ 3 , 5 ｜ 7 , 9 , 11 , 13 ｜

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

第 4 群までの項の総数は $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

第 5 群の始めの数は 16 番目の奇数 31 である。

※ $a_n = 2n - 1$,　$a_{16} = 2 \times 16 - 1 = 31$

第 5 群までの項の総数は $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

第 5 群の終わり数は 31 番目の奇数 61 である。

※ $a_n = 2n - 1$,　$a_{31} = 2 \times 31 - 1 = 61$

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

第 n 群までの項数は　$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$

第 n 群までの和は　$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$ より

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} (2k - 1) = (2^n - 1)^2$$

$n \geqq 2$　のとき，第 n 群の和は

$$(2^n - 1)^2 - (2^{n-1} - 1)^2$$

この式は $n = 1$　のときも成り立つ。

別解

第 n 群までの項数は　$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$　より

$n \geqq 2$　のとき, 第 n 群の最初の項は

$2^{n-1} - 1 + 1 = 2^{n-1}$ 番目の奇数 $2^n - 1$,

第 n 群の末項は $2^n - 1$ 番目の奇数

$2(2^n - 1) - 1 = 2^{n+1} - 3$,

第 n 群の項数は 2^{n-1}

第 n 群は等差数列であるから，第 n 群の和は

$$\frac{1}{2} \times 2^{n-1}\{(2^n - 1) + (2^{n+1} - 3)\}$$

$$= 2^{n-2}(3 \times 2^n - 4)$$

この式は $n = 1$　のときも成り立つ。

問題　2 から順に偶数を並べて，各群に 1 個, 2 個 4 個, 8 個,・・・と 2^{n-1}個になるように分ける。

(1) 第 1 群から第 3 群まで書きなさい。　※区切りは｜

(2) 第 5 群の始めと終わりの数を求めよ。

(3) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

数学B　等差×等比の形の数列の和　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

例題①　次の数列の和 S_nを求めよ。

$$S_n = 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

$$3S_n = 1\cdot3+2\cdot9+3\cdot27+\cdots+n\cdot3^{n}$$

$$S_n-3S_n = 1\cdot1+1\cdot3+1\cdot9+\cdots+1\cdot3^{n-1}-n\cdot3^{n}$$

$$= \frac{3^{n}-1}{3-1}-n\cdot3^{n}$$

$$= \frac{3^{n}-1-2n\cdot3^{n}}{2}$$

$$= \frac{(1-2n)\times3^{n}-1}{2} = -2S_n$$

$$S_n = \frac{(2n-1)\times3^{n}+1}{4}$$

例題②　次の数列の和 S_nを求めよ。

$$S_n = 1\cdot1+3\cdot3+5\cdot9+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$$

$$3S_n = 1\cdot3+3\cdot9+5\cdot27+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n}$$

$$S_n-3S_n = 1\cdot1+2\cdot3+2\cdot9+\cdots+2\cdot3^{n-1}-(2n-1)\cdot3^{n}$$

$$= 1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^{n}$$

$$= 1+\frac{6(3^{n-1}-1)}{2}-(2n-1)\cdot3^{n}$$

$$= 1+3^{n}-3-(2n-1)\cdot3^{n}$$

$$= -(2n-2)\cdot3^{n}-2 = -2S_n$$

$$S_n = (n-1)\cdot3^{n}+1$$

問題①　次の数列の和 S_nを求めよ。

$$S_n = 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot4+\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

問題②　次の数列の和 S_nを求めよ。

$$S_n = 1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

数学B　分数の数列の和　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

例題①　数列 $\dfrac{2}{1\times3},\ \dfrac{2}{3\times5},\ \cdots,\ \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ の第 n 項$(n>2)$までの和を求めよ。

$\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{A}{2n-1}+\dfrac{B}{2n+1}$ とおく。

両辺に$(2n-1)(2n+1)$を掛けて

$2=(2n+1)A+(2n-1)B$

$n=\dfrac{1}{2}$ を代入して　$2=2A$　　$\therefore\ A=1$

$n=-\dfrac{1}{2}$ を代入して　$2=-2B$　$\therefore\ B=-1$

$n>2$ のときの第 n 項までのは和は

$\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}=1-\dfrac{1}{2n+1}$

問題①　数列 $\dfrac{3}{1\times4},\ \dfrac{3}{4\times7},\ \cdots,\ \dfrac{3}{(3n-2)(3n+1)}$ の第 n 項$(n>2)$までの和を求めよ。

例題②　数列 $\dfrac{2}{1\times3},\ \dfrac{2}{2\times4},\ \dfrac{2}{3\times5},\ \cdots,\ \dfrac{2}{n(n+2)}$ の第 n 項$(n>2)$までの和を求めよ。

$\dfrac{2}{n(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+2}$ とおく。

両辺に $n(n+2)$ を掛けて $1=(n+2)A+nB$

$n=0$ を代入して　$2=2A$　　$\therefore\ A=1$

$n=-2$ を代入して　$2=-2B$　$\therefore\ B=-1$

$n>2$ のときの第 n 項までのは和は

$\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{2}{2\times4}+\dfrac{2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+2)}$

$=\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

問題②　数列 $\dfrac{2}{2\times4},\ \dfrac{2}{3\times5},\ \dfrac{2}{4\times6},\ \cdots,\ \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$ の第 n 項$(n>2)$までの和を求めよ。