

数学B 和の記号
自然数の平方の和

()年()組()番()

自然数の平方の和($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$)を求めてみよう。

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4$ であるから、数を三角形に並べる。

120°回転
120°回転
合計

($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$) $\times 3 = (\quad) \times (1 + 2 + 3 + 4)$, $9 = 2 \times (\quad) + 1$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{1}{3}(2 \times \quad + 1) \times \frac{1}{2}(\quad)(\quad + 1)$
 $= \frac{1}{6}(\quad)(\quad + 1)(2 \times \quad + 1) = (\quad)$

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明してみよう。

[1] $n = 1$ のとき $1^2 = \frac{1}{6}(\quad)(\quad + 1)(2 \times \quad + 1) = (\quad)$

[2] $n = k$ のとき、成り立つと仮定すると

$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}(\quad)(\quad + 1)(2 \quad + 1)$

$n = k + 1$ のときの左辺は

$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (\quad)^2 = \frac{1}{6}(\quad)(\quad + 1)(2 \quad + 1) + (\quad)^2$
 $= \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$

$n = k + 1$ のときの右辺は

$\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}2(k+1)+1\} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
 $= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$

$n = k + 1$ のときも成り立つので、すべての自然数 n に対して成り立つ。

このような証明法を数学的帰納法という。

問題 A 次の和を求めよ。

- (1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$ (2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$ (3) $11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 20^2$

和の記号 (シグマ)

数列の和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を記号 $\sum_{k=1}^n a_k$ を使って、 $\sum_{k=1}^n a_k$ と表す。

すなわち、 $\sum_{k=1}^n a_k =$

これは、一般項 a_k の数列を、 k を $1, 2, 3, \cdots, n$ と変えながら加えることである。

$\sum_{k=1}^n a_k$ は $\sum_{i=1}^n a_i$ や $\sum_{j=1}^n a_j$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ と書いてもよい。

問題 C 次の式を \sum を使わない式($a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$)で表せ。

(1) $\sum_{k=1}^5 a_k$ (2) $\sum_{k=1}^3 (2k + 1)$

(3) $\sum_{k=1}^5 k^2$ (4) $\sum_{k=1}^4 k(k + 1)$

問題 D 次の式を \sum を使って表せ。

(1) $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$ (2) $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$

(3) $2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5$ (4) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

問題 E 次の数列の和を \sum を使って表せ。

- (1) $1, 3, 5, 7, \cdots, 99$ (2) $2, 4, 8, 16, \cdots, 1024$

初項 公差 の等差数列 初項 公比 の等比数列
一般項 $a_n =$ 一般項 $a_n =$