

数学A 約数と倍数 ( )年( )組( )番( )

約数と倍数

10 を 2 つの整数の積で表すと、 $(10 = 1 \times \quad = 2 \times \quad)$ と表すことができる。

よって、10 の約数は  $(1, 2, \quad, \quad)$  である。10 は  $(1, 2, \quad, \quad)$  の倍数である。

整数  $a$  が整数  $b$  で割り切れるとき、 $b$  は  $a$  の  $(\quad)$ 、 $a$  は  $b$  の  $(\quad)$  という。

整数は、正の整数、負の整数、0 があるが、正の整数の範囲で考えることにした。

6 の約数を求めるには、6 を 1 ～ 6 までの数で割り切れるか調べる。

$6 \div 1 = (\quad \cdots \quad)$ ,  $6 \div 2 = (\quad \cdots \quad)$ ,  $6 \div 3 = (\quad \cdots \quad)$

$6 \div 4 = (\quad \cdots \quad)$ ,  $6 \div 5 = (\quad \cdots \quad)$ ,  $6 \div 6 = (\quad \cdots \quad)$

よって、6 の約数は  $(1, \quad, \quad, 6)$  である。  $\quad$  かけて 6 になる数を探す。

5 の倍数を求めるには、5 に 1 から順に整数をかける。

$5 \times 1 = (\quad)$ ,  $5 \times 2 = (\quad)$ ,  $5 \times 3 = (\quad)$ ,  $5 \times 4 = (\quad)$ ,  $5 \times 5 = (\quad)$ ,  $\cdots$

5 の倍数は、整数の代わりに文字  $k$  を用いて  $(5 \quad)$  と表される。

問題 A 次の数の正の約数をすべて書きなさい。

(1) 24 (2) 36

問題 B 次の数の 20 以下の正の倍数をすべて書きなさい。

(1) 2 (2) 5

(3) 3 (4) 6

倍数の判定法

2 の倍数は一の位が  $(\quad, \quad, \quad, \quad)$  になる。

3 の倍数は各位の数の和が  $(\quad$  の倍数  $)$  のとき、3 の倍数になる。

3 桁の整数  $N$  の百の位を  $a$ 、十の位を  $b$ 、一の位を  $c$  とすると、

$N = 100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1)b + c = 99a + 9b + a + b + c$

$= 3(33a + 3b) + (\quad + \quad)$

したがって、各位の和が 3 の倍数のとき、 $N$  も 3 の倍数になる。

4 の倍数は  $(4 \times \quad = \quad)$  より、下 2 桁が 4 の倍数か 00 かを調べる。

5 の倍数は一の位が  $(\quad, \quad)$  になる。

6 の倍数は  $(\quad$  の倍数かつ  $\quad$  の倍数  $)$  であるかを調べる。

8 の倍数は  $(8 \times \quad = \quad)$  より、下 3 桁が 8 の倍数か 000 かを調べる。

問題 C 3 桁の整数  $N$  の百の位を  $a$ 、十の位を  $b$ 、一の位を  $c$  とすると、各位の数の和が 9 の倍数のとき、 $N$  も 9 の倍数であることを示せ。

問題 D 十の位が  $a$ 、一の位が  $b$  の 2 桁の数  $N$  は、 $a - 2b$  が 7 の倍数なら、 $N$  も 7 の倍数であることを示せ。

発展問題 E 整数  $N$  を末位から 3 桁ごとに区切り、右から奇数番目のブロックの和から偶数番目のブロックの和を引いたものが 7 の倍数のとき、 $N$  も 7 の倍数になる。12345676 が 7 の倍数であることを確認せよ。

数学A そ いん すう ぶんかい 素因数分解 ( )年( )組( )番( )  
そ すう 素数

1 とその数以外の約数がない自然数を( )という。ただし, 1 は素数としない。

4 は (  $4 = 1 \times$   $= 2 \times$  ) と表すことができるので、素数ではない。

素数はエラトステネスのふるいによって求める方法がある。

(1) 1 以外の自然数を 順 に書く。      2   3   4   5   6   7   8   9   10

(2) 2 は素数になり，<sup>そすう</sup> をつけ，2 の<sup>ばいすう</sup> 倍数に

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

斜線を入れる。(素数から除外)

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

	のこ	さいしょう	かず	そ	すう		41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
(3)	残り	の最	小の数	3	は素数になり，	を	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	つけ，	3	の倍数	に斜線	を入れる。		61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

(4) 残りの最小の数  $n$  は素数になり， を  
つけ，  $n$  の倍数に斜線を入れる。

(5) (4)の作業を繰り返す。

問題 A <sup>う え</sup> 上の数表 <sup>す う ひ ょ う</sup> にエラトステネスのふるいの作業 <sup>さ ぎ ょ う</sup> を行い, <sup>そ す う</sup> 100 までの素数 <sup>も と</sup> を求めよ。

素因数分解

2 以上 の 整数 で、素数 でない 数を ( ) といい、合成数はいくつかの 整数 の

せき あらわ  
積で表すことができる。この整数をもとの数の因数といい、素数である因数を素因数と

いう。合成数を素数の積で表すことを( )という。素因数分解の

あらわ した 方 法 は、 積 の 順 序 を 考 え な け れ ば 1 通 り で あ る。

84 を素因数分解するには，84 を順に素数で割り，その積を作る。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 84} \\
 2 \overline{) 42} \\
 3 \overline{) 21} \\
 \hline
 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 84 \div 2 = 42 \\
 42 \div 2 = 21 \\
 21 \div 3 = 7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 84 = 2 \times 42 \\
 42 = 2 \times 21 \\
 21 = 3 \times 7
 \end{array}
 \quad
 84 = ( \quad \times \quad \times \quad \times \quad )$$

問題 B <sup>つぎ</sup> <sup>かず</sup> <sup>そ</sup> <sup>いん</sup> <sup>すう</sup> <sup>ぶん</sup> <sup>かい</sup> 次の数を素因数分解せよ。

(1) 96 (2) 180

やくすう                      もと  
約数をすべて求める

108の正の約数をすべて求めてみよう。(  $108 = 2^3 \times 3^3$  )であるから

	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$
$2^0$	$2^0 \times 3^0 =$	$2^0 \times 3^1 =$	$2^0 \times 3^2 =$	$2^0 \times 3^3 =$
$2^1$	$2^1 \times 3^0 =$	$2^1 \times 3^1 =$	$2^1 \times 3^2 =$	$2^1 \times 3^3 =$
$2^2$	$2^2 \times 3^0 =$	$2^2 \times 3^1 =$	$2^2 \times 3^2 =$	$2^2 \times 3^3 =$

したがって ( )

108の正の約数の個数は(      + 1 ) (      + 1 ) = (      個 ) になる。

せい やくすう そうわ  
108 の正の約数の総和は

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \\ &= (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9 + 27) = ( \quad ) \end{aligned}$$

自然数  $N$  の素因数分解が  $N = p^a \times q^b \times r^c \cdots$  のとき,

$N$ の正の約数の個数は $(\overset{\text{せい}}{\text{せい}} + 1)(\overset{\text{やくすう}}{\text{やくすう}} + 1)(\overset{\text{こすう}}{\text{こすう}} + 1) \cdots$ になる。

問題 C  $2^{10}$  の正の約数の個数を求めよ。

(1) 400

(2) 300

数学A さいだいこうやくすう 最大公約数とさいしょうこうばいすう 最小公倍数 ( )年( )組( )番( )

さいしょうこうばいすう 最小公倍数

ばいすう 6 の倍数は( 6, , , , , , , , ,... )である。

ばいすう 9 の倍数は( 9, , , , , , , , ,... )である。

6 と 9 の倍数に きょうつう かず 共通な数は( , , ,... )であり, さいしょう かず 最小の数は( )である。

このように 2 つの整数に せいすう きょうつう ばいすう 共通な倍数を( )といい, こうばいすう なか もっと ちゅう 公倍数の中で最も小さな数を( )という。 さいしょうこうばいすう 最小公倍数は L.C.M (Least Common Multiple)と あらわ 表すことがある。

さいしょうこうばいすう 最小公倍数は 2 つの数の かず そ いんすうぶんかい 素因数分解に, 少なくとも 1 つ以上 すく い じょうふく そ いんすう 含まれている素因数を か もと すべて掛けて求める。

$6 = ( \times ), 9 = ( \times )$ であるから, 6 と 9 の さいしょうこうばいすう 最小公倍数は(  $\times \times =$  )

さいだいこうやくすう 最大公約数

やくすう 24 の約数は( 1, , , , , , , 24 )である。

やくすう 36 の約数は( 1, , , , , , , 36 )である。

やくすう やくすう きょうつう かず 24 の約数と 36 の約数に 共通な数は( 1, , , , , )である。

このように 2 つの整数に せいすう きょうつう やくすう 共通な約数を( )といい, こうやくすう なか もっと おお 公約数の中で最も大きな数を( )という。 さいだいこうやくすう 最大公約数は G.C.M (Great Common Measure)と あらわ 表すことがある。

さいだいこうやくすう 最大公約数は, 2 つの数を かず そ いんすうぶんかい きょうつう そ いんすう 素因数分解して, 共通な素因数を か もと すべて掛けて求める。

$24 = ( \times \times \times ), 36 = ( \times \times \times )$ であるから,  $24$  と  $36$  の さいだいこうやくすう 最大公約数は (  $\times \times =$  )になる。

$24$  と  $36$  の さいしょうこうばいすう 最小公倍数は(  $\times \times \times \times =$  )になる。

2)	24	36
2)	12	18
3)	6	9
	2	3

問題 A つぎ かず 次の数の さいしょうこうばいすう 最小公倍数と さいだいこうやくすう 最大公約数を求めよ。

- (1) 25, 40 (2) 48, 72

たが そ 互いに素

2 つの せいすう 整数  $a, b$  の さいだいこうやくすう 最大公約数が 1 であるとき,  $a, b$  は( )という。

たが そ 互いに素である しぜんすう 自然数 3, 4 の ばいすう 倍数について かんが 考えてみよう。

ばいすう 3 の倍数は せいすう 整数  $k$  を用いて(  $k$  ), ばいすう 4 の倍数は せいすう 整数  $l$  を用いて(  $l$  )と あらわ 表される。

ばいすう 3  $k$  が ばいすう 4 の倍数であるときは  $k$  が( ばいすう の倍数 )であり, ばいすう 4  $l$  が ばいすう 3 の倍数であるときは  $l$  が( ばいすう の倍数 )である。 ばいすう 3 の倍数であり, ばいすう 4 の倍数である数は( かず ばいすう の倍数 )である。

「しぜんすう  $a$  を自然数とするととき,  $a + 4$  が ばいすう 7 の倍数,  $a + 2$  が ばいすう 3 の倍数であるとき,  $a + 11$  が ばいすう 21 の倍数である」ことを証明しよう。

$a + 4, a + 2$  は しぜん 自然数  $m, n$  を用いると  $a + 4 = ( m ), a + 2 = ( n )$

$a + 11$  を もち あらわ  $m$  を用いて表すと

$a + 11 = ( a + 4 ) + ( ) = ( m + ) = ( ( m + ) ) \cdots$

$a + 11$  を もち あらわ  $n$  を用いて表すと

$a + 11 = ( a + 2 ) + ( ) = ( m + ) = ( ( n + ) ) \cdots$

$a + 11$  は, ばいすう より( ばいすう の倍数 ), ばいすう より( ばいすう の倍数 )になる。

7 と 3 は たが そ 互いに素であるから  $a + 11$  は(  $7 \times 3 =$  ばいすう の倍数 )である。

問題 B しぜんすう  $a$  を自然数とするととき,  $a + 2$  が ばいすう 3 の倍数,  $a + 3$  が ばいすう 2 の倍数であるとき,  $a + 5$  が ばいすう 6 の倍数であることを しょうめい 証明せよ。

数学A 割り算の商と余り ( )年( )組( )番( )

割り算の商と余り

24 個のもみじ饅頭を友達に均等に分けることにした。

6人で分けようとするとき、1人分は( )個になる。(  $24 = 6 \times \quad + \quad$  )

7人で分けようとするとき、1人分は( )個になる。(  $24 = 7 \times \quad + \quad$  )

よって、整数  $a$  と正の整数  $b$  について、次の定理が成り立つ。

$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$  となる整数  $q, r$  は 1 通りである。

$q, r$  をそれぞれ  $a$  を  $b$  で割ったときの( ), ( ) という。

問題 A 次の  $a$  を  $b$  で割ったときの商と余りを求めよ。

- (1)  $a = 35, b = 4$  (2)  $a = -10, b = 4$

整数  $a, b$  において、 $a$  を 6 で割ると 4 余り、 $b$  を 6 で割ると 5 余る。

このとき、 $a + b, a \times b$  を 6 で割った余りを求めよう。

(  $a = 6k + \quad$  ), (  $b = 6l + \quad$  ) (  $k, l$  は整数 )

$a + b = (6k + \quad) + (6l + \quad) = 6k + 6l + ( \quad )$

$\quad = 6(k + l + \quad) + ( \quad )$

よって  $a + b$  を 6 で割った余りは( )である。

$a \times b = (6k + \quad) \times (6l + \quad) = 6^2kl + ( \quad k ) + ( \quad l ) + ( \quad )$

$\quad = 6(6kl + \quad k + \quad l + \quad) + ( \quad )$

よって  $a \times b$  を 6 で割った余りは( )である。

問題 B  $640 \times 250$  を 6 で割った余りを求めよ。

余りによる整数の分類

整数を 2 で割ったときの余りは( , )であるから、すべての整数  $n$  は

偶数のとき (  $n = \quad k$  ), 奇数のとき (  $n = \quad k$  ) (  $k$  は整数 )

整数を 3 で割ったときの余りは( , , )であるから、すべての整数  $n$  は

(  $n = \quad k$  ), (  $n = \quad k$  ), (  $n = \quad k$  ) (  $k$  は整数 )

連続する整数の積の性質

連続する 2 つの整数  $n, m$  の積  $n \times m$  が、2 の倍数であることを証明する。

(1)  $n$  が偶数のとき

(  $n = \quad k$  ), (  $m = \quad k$  ) (  $k$  は整数 )

$n \times m = ( \quad k ) ( \quad k ) = 2 ( \quad )$

(2)  $n$  が奇数のとき

(  $n = \quad k$  ), (  $m = \quad k$  ) (  $k$  は整数 )

$n \times m = ( \quad k ) ( \quad k ) = 2 ( \quad )$

よって、連続する 2 つの整数の積は 2 の倍数である。 Q.E.D

問題 C 連続する 3 つ整数の積は 6 の倍数であることを証明せよ。