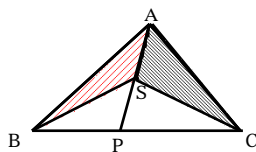


# 数学A チェバ・メネラウスの定理 ( )年( )組( )番( ) 面積と辺の比

ABC の辺 BC 上の点を P とし, AP 上に点 S をとれば

$$\frac{ABS}{ACS} = \frac{BP}{PC}$$

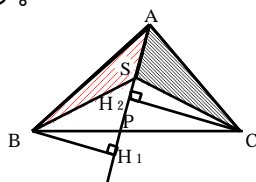


頂点 B, C から, AP とその延長線上に垂線 BH<sub>1</sub>, CH<sub>2</sub> を下ろす。

ABS と ACS は底辺が共通であるから, 面積比は高さ, の比と同じになる。

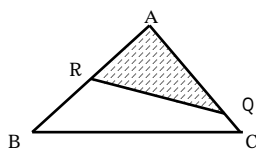
また, PBH<sub>1</sub> と PCH<sub>2</sub> は相似であるから, (2 角が等しい)

$$\frac{BH_1}{CH_2} = \frac{BP}{PC} \quad \text{よって,} \quad \frac{ABS}{ACS} = \frac{BP}{PC}$$



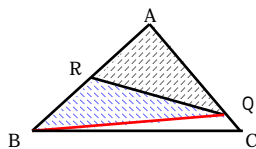
ABC の 2 辺 AB, AC 上にそれぞれ点 R, Q があれば,

$$ARQ = ABC \times \frac{AR}{AB} \times \frac{AQ}{AC}$$



頂点 Q から B に補助線を引く。

$$ABQ = ABC \times \frac{AQ}{AC} \quad ARQ = ABQ \times \frac{AR}{AB}$$



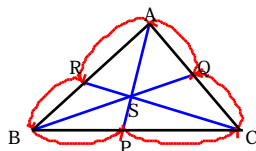
$$\text{よって,} \quad ARQ = ABC \times \frac{AQ}{AC} \times \frac{AR}{AB}$$

## チェバの定理

ABC の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり

3 直線 AP, BQ, RB が 1 点で交われば

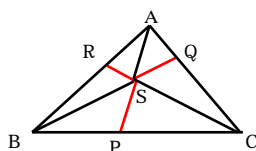
$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$



3 直線 AP, BQ, RB の交点を S とすると

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB}$$

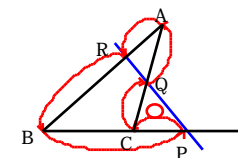
$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$



## メネラウスの定理

ABC の頂点を通らない直線 l が辺 BC, CA, AB またはその延長線と交わる点をそれぞれ P, Q, R とすると

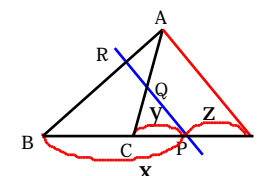
$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$



A を通り PQ に平行な直線を引き, BC の延長線上との交点を S とする。BP, PC, PS をそれぞれ x, y, z とする。

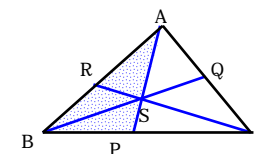
$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB} \quad \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$



問題 A メネラウスの定理により, チェバの定理を証明せよ。

ABC の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり 3 直線 AP, BQ, RB の交点を S とする。



$$ABP \text{ に直線 } RC \text{ が交わっているので,} \quad \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots$$

$$APC \text{ に直線 } BQ \text{ が交わっているので,} \quad \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} = 1 \quad \dots$$

と の両辺を掛け合わせると

$$\left( \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} \right) \times \left( \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} \right) = \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

発展問題 B 直角三角形 ABP において, AR = RB = 6cm, BC = 8cm, CP = 4cm のとき,

$\frac{CQ}{QA}$  を求め, 四角形 BCQR の面積を求めよ。

