

数学A 三角形の外心・内心・重心 ()年()組()番() 三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を()という。

「三角形の3つの中線は1点で交わり、交点は中線を2:1に内分する。その交点を()という。」

△ABCの辺BC, CA, ABの中点をそれぞれD, E, Fとする。

E, FがAC, ABの中点であるから、中点連結定理により

$$(FE \parallel BC) \text{ かつ } (FE = \frac{1}{2} BC)$$

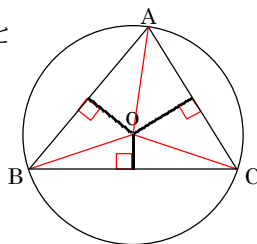
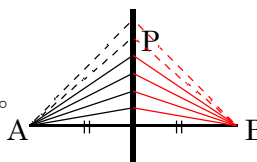
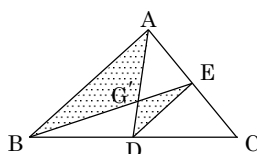
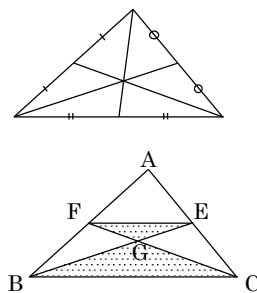
△BCGと△GEFが相似であるから $BG : GE = BC : FE = () : ()$

よって、点Gは中線BE, CFをそれぞれ2:1に内分する。

中線BE, ADの交点をG'とすると、同様にして、G'は

中線BE, ADをそれぞれ2:1に内分する。

よって、点G, G'はともに中線BEを2:1に内分する点であるから一致する。



三角形の外心

線分ABの垂直二等分線上に点Pをとると、(PA =)になる。

「三角形の各辺の垂直二等分線は1点で交わり、その点は3つの頂点から等しい距離になる。この点を三角形の()という。」

△ABCにおいて、辺AB, BCの垂直二等分線の交点をOとすると

(OA = , OB =)よって、OA = OCになる。

したがって、Oは辺ACの垂直二等分線上の点である。

外心は三角形の各頂点から等距離にあるので、外心を中点と

した3頂点を通る円を描くことができる。この円を外接円という。

三角形の垂心

「三角形の各頂点より対辺に下ろした3つの垂線は1点で

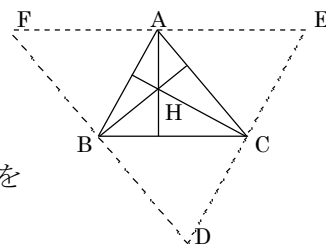
交わる。この点を()という。」

△ABCの各頂点を通り、対辺に平行な直線で作る三角形を

△DEFとすると、四角形ACBF, ABCEは平行四辺形になる。

AE=BC=AFとなり、Aから辺BCに下ろした垂線は辺FEの垂直二等分線になる。

B, Cからも同様になる。したがって、垂線は△DEFの垂心になり、1点で交わる。



三角形の内心

半直線OA, OBの作る角∠AOBの2等分線上に点Pをとると

点Pからそれぞれの半直線に下ろした垂線の長さは等しい。

逆に、∠AOBの内部にあり、半直線OA, OBに下ろした垂線の長さが等しい点は∠AOBの2等分線上にある。

「三角形の3つの内角の2等分線は1点で交わり、その点は

3辺から等距離にある。この点を三角形の()という。」

内心を中点にして三角形の3辺に接する円を描くことができる。

この円を内接円という。

△ABCの∠B, ∠Cの2等分線の交点をIとし、Iから辺への垂線をD, E, Fとする。

ID = IF, ID = IE よって、(IF =)

したがって、AIは∠Aの2等分線である。

すなわち、3つの内角の2等分線は1点Iで交わり、Iは3辺から等距離にある。

三角形の傍心

「三角形の1つの角の2等分線と他の2つの角の外角の2等分線は1点で交わる。

この点を()という。」

傍心から対辺に接する円を傍接円という。

∠B, ∠Cの外角の2等分線の交点をJとする。

点Jから辺BC, 辺AB, ACの延長線に下ろした

垂線の足をそれぞれD, E, Fとする。

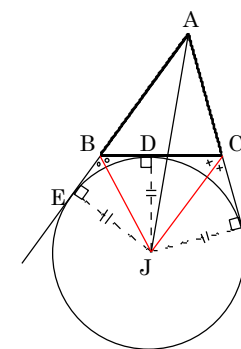
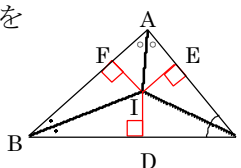
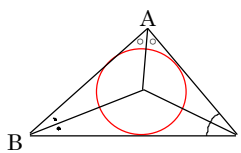
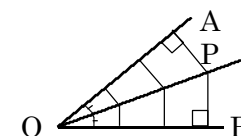
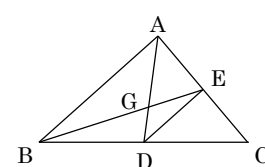
△AJFと△AJEにおいて、JF=JD, JE=JDであるから

(JF =) また、∠AFJ=∠AEJ=90°, AJは共通

よって、△AJFと△AJEは合同な三角形である。

したがって、AJは∠Aの2等分線になる。

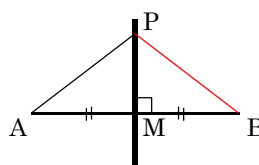
問題 点Gが△ABCの重心であり、GE=3, AG=4のとき、BE, GDの大きさを求めよ。



数学A 三角形の外心・内心・重心① ()年()組()番()

三角形の外心 (circumcenter)

線分 AB の中点を M とするとき、垂直二等分線上の点 P について考えよう。



$\triangle AMP$ と $\triangle BMP$ において、() は共通である。

M が AB の中点より、($AM =$)

PM が垂直二等分線であるから、($\angle AMP = \angle$) $= 90^\circ$

2 辺とその間の角が等しいので、 $\triangle AMP$ と $\triangle BMP$ は()である。

よって、($AP =$) になる。

線分 AB の垂直二等分線上の点は 2 点 A, B から等距離にある。

2 点 A, B から等距離にある点は、線分 AB の垂直二等分線上にある。

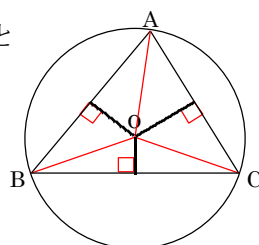
したがって、次の定理が証明できる。

「三角形の各辺の垂直二等分線は 1 点で交わり、その点は 3 つの頂点から等しい距離になる。この点を三角形の()という。」

$\triangle ABC$ において、辺 AB, BC の垂直二等分線の交点を O とすると

($OA =$, $OB =$) よって、 $OA = OC$ になる。

したがって、O は辺 AC の垂直二等分線上の点である。

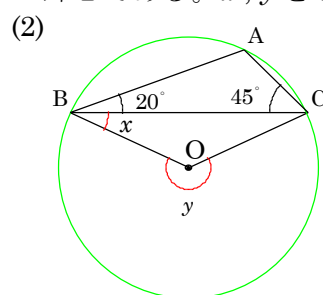
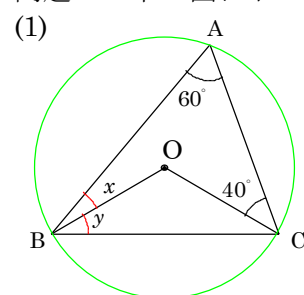


外心は三角形の各頂点から等距離にあるので、外心を中点と

した 3 頂点を通る円を描くことができる。

この円を外接円(circumcircle)という。

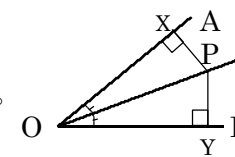
問題 A 下の図において、点 O が $\triangle ABC$ の外心である。 x, y を求めよ。



三角形の内心 (incenter)

$\angle AOB$ の 2 等分線上に点 P をとるとき、点 P について考えよう。

点 P から半直線 OA, OB に下ろした垂線の足を X, Y とする。



$\triangle POX$ と $\triangle POY$ において、OP は共通である。

X, Y は点 P から下ろした垂線の足であるから、($\angle PXO = \angle$) $= 90^\circ$

OP は角の二等分線であるから、($\angle POX = \angle$)

2 角が等しいから、($\angle OPX = \angle$)

一辺とその両端の角が等しいから、 $\triangle POX$ と $\triangle POY$ は()である。

よって、($PX =$) になる。

角の 2 等分線上の点 P から、それぞれの辺に下ろした垂線の長さは等しい。逆に、角

の内部にあり、それぞれの辺に下ろした垂線の長さが等しい点は角の 2 等分線上にある。

したがって、次の定理が証明できる。

「三角形の 3 つの内角の 2 等分線は 1 点で交わり、その点は 3 辺から等距離にある。この点を三角形の()という。」

内心を中点にして三角形の 3 辺に接する円を描くことができる。

この円を内接円(incircle)という。

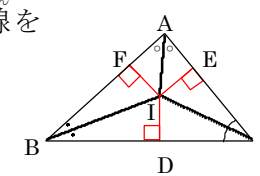
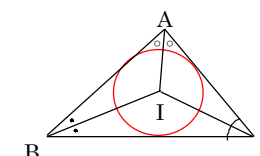
$\triangle ABC$ の $\angle B, \angle C$ の 2 等分線の交点を I とし、I から辺への垂線を

D, E, F とする。

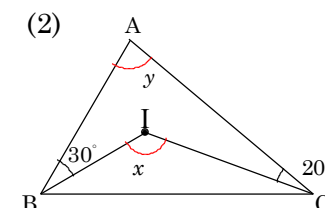
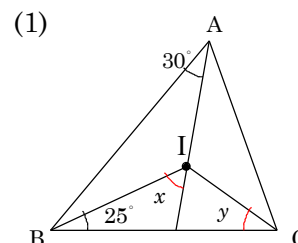
$ID = IF, ID = IE$ よって、($IF =$)

したがって、AI は $\angle A$ の 2 等分線である。

すなわち、3 つの内角の 2 等分線は 1 点 I で交わり、I は 3 辺から等距離にある。



問題 B 下の図において、点 I が $\triangle ABC$ の内心である。 x, y を求めよ。



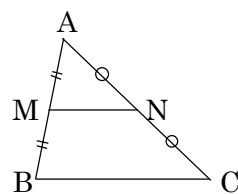
数学A 三角形の外心・内心・重心② ()年()組()番()

中点連結定理 (mid-point theorem)

「△ABC の辺 AB, AC の中 点を,

それぞれ M, N とするとき,

$$MN \parallel BC \text{ かつ } MN = \left(\frac{1}{2} BC \right)$$



△ABC と △AMN において, M, N は辺 AB, AC の中 点であるから

$$(AM : AB = 1 : 2), (AN : AC = 1 : 2)$$

$$\text{したがって, } (AM : AN = 1 : 1)$$

$$(\angle MAN = \angle BAC) \quad \text{※} \angle A \text{ は共通}$$

2 組の辺の比とその間の角が等しいので (△ABC ≅ △AMN)

$$\text{相似な図形の対応する角は等しいので } (\angle ABC = \angle AMN)$$

$$\text{よって, 同位角が等しいので } (MN \parallel BC)$$

また, 相似な図形の対応する辺の比は等しいので

$$(MN : BC = \frac{1}{2}), \quad (MN = \frac{1}{2} BC)$$

三角形の重心 (center of gravity)

三角形の頂 点とその対辺の中 点を結ぶ線分を()という。

「三角形の 3 つの中 線は 1 点で交わり, 交点は中 線を 2 : 1 に内分する。その交点を()という。」

△ABC の辺 BC, CA, AB の中 点をそれぞれ D, E, F とする。

E, F が AC, AB の中 点であるから, 中点連結定理により

$$(FE \parallel BC) \text{ かつ } (FE = \frac{1}{2} BC)$$

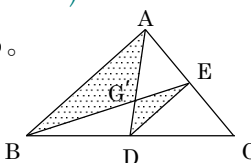
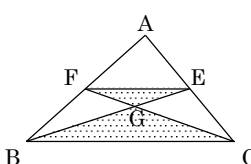
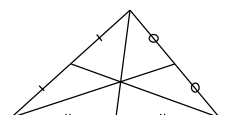
△BCG と △GEF が相似であるから $BG : GE = BC : FE = (2 : 1)$

よって, 点 G は中 線 BE, CF をそれぞれ(2 : 1)に内分する。

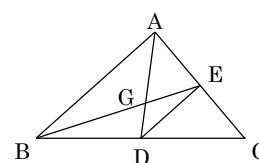
中 線 BE, AD の交点を G' とすると, 同様にして, G' は

中 線 BE, AD をそれぞれ(2 : 1)に内分する。

点 G, G' はともに中 線 BE を(2 : 1)に内分する点であるから一致する。



問題 点 G が △ABC の重心であり, $GE = 3, AG = 4$ のとき, BE, GD の大きさを求めよ。



三角形の垂心 (orthocenter)

「三角形の各 頂 点より対辺に下ろした 3 つの垂線は 1 点で交わる。この点を()という。」

△ABC の各 頂 点を通り, 対辺に平行な直 線で作る三角形を △DEF とすると, 四角形 ACBF, ABCE は()になる。

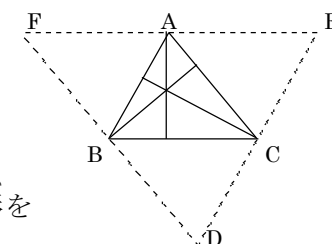
平行四辺形 ACBF より, $(AF = BE)$

平行四辺形 ABCE より, $(AE = BF)$

$(AF = AE)$ なり, A から辺 BC に下ろした垂線は辺 FE の垂直二等分線になる。

B, C から同様になる。

したがって, △ABC の垂心は △DEF の()になり, 一点で交わる。



三角形の傍心 (excenter)

「三角形の 1 つの角の 2 等分線と他の 2 つの角の外角の 2 等分線は 1 点で交わる。

この点を()という。」

傍心から対辺に接する円を傍接円(excircle)という。

∠B, ∠C の外角の 2 等分線の交点を J とする。

点 J から辺 BC, 辺 AB, AC の延長 線 上に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。

△AJF と △AJE において, $JF = JD, JE = JD$ であるから

$$(JF = JE)$$

$\angle AFJ = \angle AEJ = 90^\circ$, AJ は共通

よって, △AJF と △AJE は合同な三角形になり, AJ は ∠A の 2 等分線である。

