

1. 次の曲線とx軸および2直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題①  $y = \frac{1}{x} + 1$  と x 軸,  $x = 1, x = 4$

$$S = \int_1^4 \left( \frac{1}{x} + 1 \right) dx = \left[ \log x + x \right]_1^4$$
$$= (\log 4 + 4) - (\log 1 + 1) = \log 4 + 3$$

問題①  $y = \frac{1}{x+1}$  と x 軸,  $x = 0, x = 3$

例題②  $y = \sqrt{2x+1}$  と x 軸,  $x = 0, x = 4$

$$\left( \int \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right)$$
$$= \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$S = \int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx = \left[ \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$
$$= \left\{ \frac{1}{3} (2 \times 4 + 1)^{\frac{3}{2}} \right\} - \left\{ \frac{1}{3} (2 \times 0 + 1)^{\frac{3}{2}} \right\}$$
$$= \frac{26}{3}$$

問題②  $y = \sqrt{3x+1}$  と x 軸,  $x = 0, x = 5$

2. 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題①  $y = \sqrt{3x}, y = x$

曲線と直線の共有点のx座標は $\sqrt{3x} = x$ を解き  
 $x = 0, 3$ である。  
 $0 \leq x \leq 3$ では $\sqrt{3x} \geq x$ である。

$$S = \int_0^3 (\sqrt{3x} - x) dx = \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$
$$= \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} 3^{\frac{3}{2}} - \frac{3^2}{2} \right) - \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^2}{2} \right)$$
$$= 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

問題①  $y = \sqrt{2x}, y = x$

問題②  $y = \sqrt{x}, y = x^3$

1. 次の曲線とx軸および2直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題 ①  $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$  と x 軸,  $x = 1, x = 6$

$$\left( \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} &= \int (3x-2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (3x-2)^{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{2}{3} (3x-2)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned} \right)$$
$$S = \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \left[ \frac{2}{3} (3x-2)^{\frac{1}{2}} \right]_1^6$$
$$= \left\{ \frac{2}{3} (3 \times 6 - 2)^{\frac{1}{2}} \right\} - \left\{ \frac{2}{3} (3 \times 1 - 2)^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$$

問題 ①  $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$  と x 軸,  $x = 1, x = 5$

例題 ②  $y = \frac{1}{x^2+4}$  と x 軸,  $x = 0, x = 2$

$x = 2 \tan \theta$  とおくと  $dx = \frac{2 d \theta}{\cos^2 \theta}$   $\begin{matrix} x \parallel 0 \rightarrow 2 \\ \theta \parallel 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{matrix}$

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2 \tan \theta)^2 + 4} \times \frac{2 d \theta}{\cos^2 \theta}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 (\tan^2 \theta + 1)} \times \frac{2 d \theta}{\cos^2 \theta}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta}{4} \times \frac{2 d \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d \theta = \frac{\pi}{8}$$

問題 ②  $y = \frac{1}{x^2+1}$  と x 軸,  $x = 0, x = 1$

2. 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題  $y = x - 2\sqrt{x}$  と x 軸,  $x = 0, 9$

曲線とx軸の共有点のx座標は  $x - 2\sqrt{x} = 0$

を解き,  $\sqrt{x} (\sqrt{x} - 2) = 0$  より  $x = 0, 4$

区間  $0 \leq x \leq 4$  では  $2\sqrt{x} \geq x$  より, 常に  $y \leq 0$

区間  $0 \leq x \leq 9$  では  $x \geq 2\sqrt{x}$  より, 常に  $y \geq 0$

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx + \int_4^9 (x - 2\sqrt{x}) dx$$
$$= \left[ \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_4^9$$
$$= \left( \frac{4}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^2}{2} \right) - \left( \frac{4}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^2}{2} \right) +$$
$$\left( \frac{9^2}{2} - \frac{4}{3} 9^{\frac{3}{2}} \right) - \left( \frac{4^2}{2} - \frac{4}{3} 4^{\frac{3}{2}} \right)$$
$$= \frac{8}{3} - 0 + \frac{9}{2} - \left( -\frac{8}{3} \right) = \frac{59}{6}$$

問題  $y = x - \sqrt{x}$  と x 軸,  $x = 0, 4$

1. 次の曲線と  $x$  軸および 2 直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題

①

$$y = \log x \text{ と } x \text{ 軸}, x = 1, x = e^2$$
$$S = \int_1^{e^2} \log x \, dx = \int_1^{e^2} (x)' \log x \, dx$$
$$= \left[ x \log x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{1}{x} \, dx$$
$$= \left[ x \log x - x \right]_1^{e^2} = e^2 - (-1) = e^2 + 1$$

問題

①

$$y = \log (x + 1) \text{ と } x \text{ 軸}, x = 0, x = 1$$

例題

②

$$y = \sqrt{4 - x^2} \text{ と } x \text{ 軸}, x = 0, x = 1$$
$$x = 2 \sin \theta \text{ とおくと } dx = 2 \cos \theta \, d\theta \quad \begin{array}{l} x \parallel 0 \rightarrow 1 \\ \theta \parallel 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} \end{array}$$

この範囲では  $\cos \theta \geq 0$  である。

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} = 2 \cos \theta$$
$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos \theta) \times 2 \cos \theta \, d\theta$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$
$$= 2 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \pi$$

問題

②

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ と } x \text{ 軸}, x = 0, x = \frac{1}{2}$$

2. 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題

$$x + 3y = 4, xy = 1 \text{ (直角双曲線)}$$

2つの曲線の共有点の  $x$  座標は  $x = 1, 3$

$$x + 3y = 4, x \neq 0 \text{ より } x^2 + 3xy = 4x$$
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$$

区間  $1 < x < 3$  では  $xy = 1$  が下になる。

$$S = \int_1^3 \left\{ \left( -\frac{x}{3} + \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{x} \right\} dx$$
$$= \left[ -\frac{x^2}{6} + \frac{4x}{3} - \log |x| \right]_1^3$$
$$= \left( -\frac{3^2}{6} + \frac{4 \times 3}{3} - \log 3 \right) - \left( -\frac{1^2}{6} + \frac{4 \times 1}{3} - \log 1 \right) = \frac{4}{3} - \log 3$$

問題

①

$$x + 2y = 3, xy = 1$$

問題

②

$$x + 4y = 5, xy = 1$$

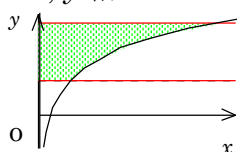
1. 次の曲 線と直 線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題①

$y = \log x + 1, y = 1, y = e, y$  軸

$y = \log x + 1$  より  $x = e^{y-1}$   
常に  $e^{y-1} > 0$  であるから

$S = \int_1^e e^{y-1} dy = \left[ e^y \right]_1^e = e^{e-1} - 1$



問題①  $y = \log x, y = 1, y = e^2, y$  軸

例題②

$x = y^2 - 1, x = 2y - 1$

曲 線と直 線の交点は  $y^2-1=2y-1$  の解である。  
 $y^2 - 2y = 0$  より  $y(y - 2) = 0, y = 0, 2$   
 $0 \leq y \leq 2$  では  $2y - 1 \geq y^2 - 1$

$S = \int_0^2 \{ (2y - 1) - (y^2 - 1) \} dy$   
 $= \int_0^2 (-y^2 + 2y) dy = \left[ -\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2$   
 $= \left( -\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 = \frac{4}{3}$

問題②  $x = y^2 - 4, x = y + 2$

問題③  $x = 4y - y^2, x = 0$

2. 次の楕円の面積  $S$  を求めよ。

例題

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$y \geq 0$  のとき,  $y$  について解くと  $y = \frac{4}{3} \sqrt{4^2 - x^2}$   
求める面積  $S$  は楕円の上半分の面積の 2 倍である。

$S = 2 \int_{-3}^3 \frac{4}{3} \sqrt{3^2 - x^2} dx$   
 $= \frac{8}{3} \int_{-3}^3 \sqrt{3^2 - x^2} dx = \frac{16}{3} \int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2} dx$   
 $= \frac{16}{3} \times \frac{1}{4} \pi \times 3^2 = 12 \pi$   
 $\therefore \int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2} dx$  は半径 3 の円の面積の  $\frac{1}{4}$

問題①  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

問題②  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

1. 次の直線と曲線の交点のx座標を求めよ。

例題①

$y = 2x, y = x\sqrt{x}$

$2x - x\sqrt{x} = x(2 - \sqrt{x}) = 0$

$x = 0, 4$

問題①

$y = x, y = \sqrt{x}$

例題②

$y = \frac{x}{e}, y = xe^{-x}$

$\frac{x}{e} - xe^{-x} = x(e^{-1} - e^{-x}) = 0$

$x = 0, 1$

問題②

$y = e^2x, y = xe^x$

2. 次の直線と曲線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題

$y = 2x, y = x\sqrt{x}$

直線と曲線の交点のx座標は  $x = 0, 4$

$0 \leq x \leq 1$  では  $2x \geq x\sqrt{x}$

$S = \int_0^4 (2x - x\sqrt{x}) dx$

$= \left[ x^2 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \left( 4^2 - \frac{2}{5} \times 4^{\frac{5}{2}} \right) - 0$

$= 16 - \frac{64}{5} = \frac{16}{5}$

問題

$y = x, y = \sqrt{x}$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$\int_0^1 xe^{-x} dx = \int_0^1 x(-e^{-x})' dx$

$= \left[ -xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx$

$= \left[ -xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^1 = -2e^{-1} + 1$

問題

$\int_0^2 xe^x dx$

4. 次の直線と曲線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題

$y = \frac{x}{e}, y = xe^{-x}$

直線と曲線の交点のx座標は  $x = 0, 1$

$y = xe^{-x}$  は  $x = 1$  が最大値であるので

$0 \leq x \leq 1$  では  $\frac{x}{e} \geq xe^{-x}$  である。

$S = \int_0^1 \left( \frac{x}{e} - xe^{-x} \right) dx$

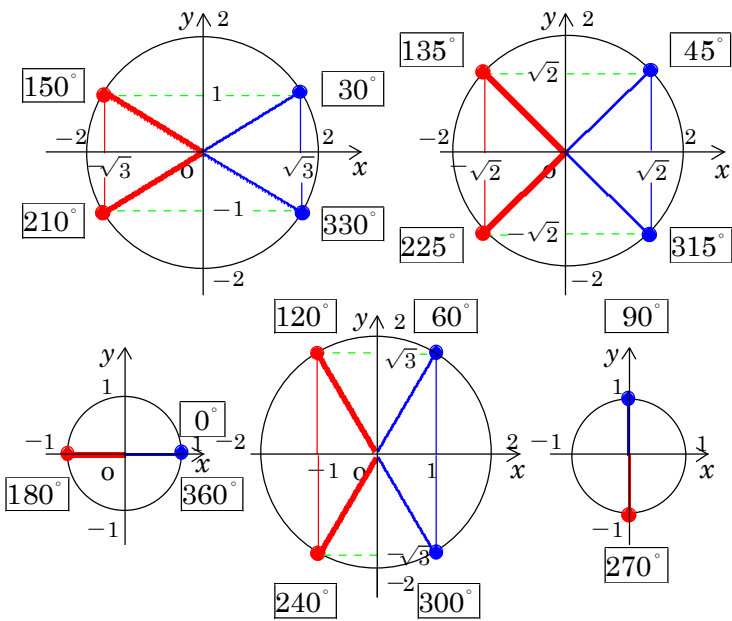
$= \left[ \frac{x^2}{2e} \right]_0^1 - \int_0^1 xe^{-x} dx$

$= \left[ \frac{x^2}{2e} + xe^{-x} + e^{-x} \right]_0^1 = \frac{5}{2e} - 1$

問題

$y = e^2x, y = xe^x$

1. 図を利用して、次の三角関数の表を完成せよ。



$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\cos \theta$	1		—		0

$\theta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \theta$	1	—	—	$\frac{1}{2}$	
$\cos \theta$		$-\frac{1}{2}$	—		-1

2.  $0 \leq x \leq 2\pi$  において、次の方程式を解きなさい。

例題  $\sin x = \sin \frac{x}{2}$

$$\sin x = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2}$$
$$2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2}$$
$$\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} - 1\right) = 0$$
$$\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ のとき } x = 0, 2\pi$$
$$2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \text{ のとき } x = \frac{2\pi}{3}$$

問題  $\sin x = \sin 2x$

3. 次の2つの曲線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題  $y = \sin x, y = \sin \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2\pi$

2つの曲線の共有点の  $x$  座標は  $\sin x = \sin \frac{x}{2}$  の解である。

$0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で解くと、 $x = 0, \frac{2\pi}{3}, 2\pi$

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  の範囲では  $\sin x \geq \sin \frac{x}{2}$  より

$$S_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \sin x - \sin \frac{x}{2} \right) dx$$
$$= \left[ -\cos x + 2 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$
$$\left( -\cos \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3} \right) - \left( -\cos 0 + 2 \cos 0 \right)$$

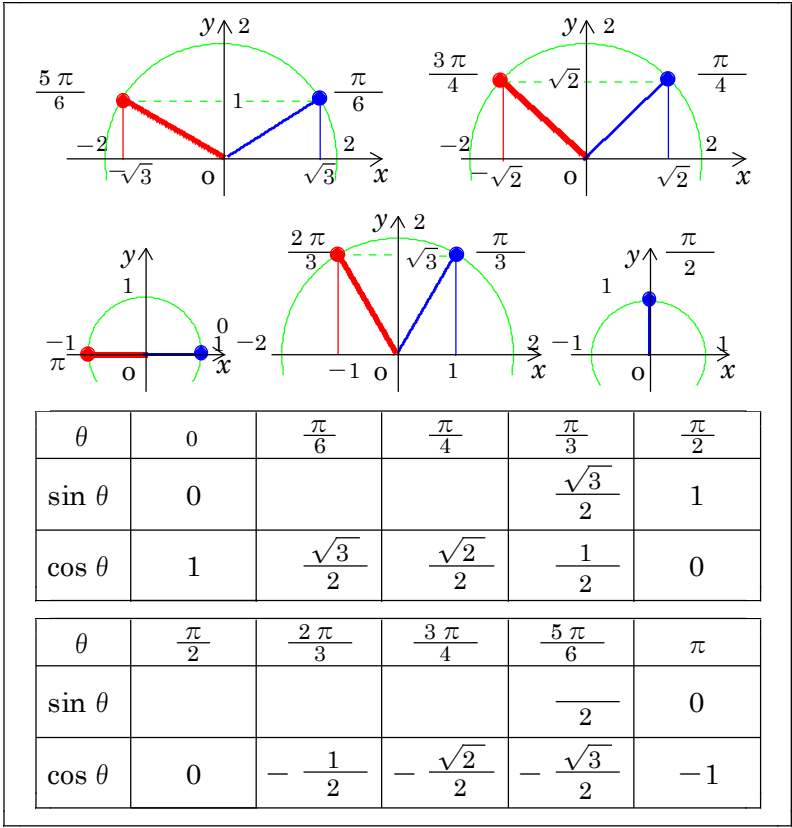
$\frac{2\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$  の範囲では  $\sin x \leq \sin \frac{x}{2}$  より

$$S_2 = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} \left( \sin \frac{x}{2} - \sin x \right) dx$$
$$= \left[ -2 \cos \frac{x}{2} + \cos x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} = \frac{9}{2}$$
$$\left( -2 \cos \pi + \cos 2\pi \right) - \left( -2 \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

面積  $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$

問題  $y = \sin x, y = \sin 2x, 0 \leq x \leq \pi$

1. 図を利用して、次の三角関数の表を完成せよ。



2. 次の曲線とx軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題  $y = x \sin x, 0 \leq x \leq \pi$

$0 \leq x \leq \pi$ において、 $x \sin x = 0$ になるのは  
 $x = 0$  または  $\sin x = 0$  より  $x = 0, \pi$   
 $0 < x < \pi$  では  $x \sin x > 0$  であるから

$$S = \int_0^\pi x \sin x \, dx = \int_0^\pi x (-\cos x)' \, dx$$
$$= \left[ x (-\cos x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx$$
$$= \left[ x (-\cos x) + \sin x \right]_0^\pi = \pi$$

問題  $y = x \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

3. 次の2つの曲線で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題  $y = 2 \sin x, y = \sin 2x, 0 \leq x \leq \pi$

2つの曲線の共有点のx座標は  $2 \sin x = \sin 2x$  の  
解である。 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で解くと、

$$2 \sin x - \sin 2x = \sin x (2 - \cos x) = 0 \text{ より}$$

$\sin x = 0$  になり、 $x = 0, \pi$

区間  $0 \leq x \leq \pi$  では  $2 \sin x > \sin 2x$  であるから

$$S = \int_0^\pi (2 \sin x - \sin 2x) \, dx$$
$$= \left[ -2 \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi$$
$$= \left( -2 \cos \pi - \frac{1}{2} \cos 2\pi \right) - \left( -2 \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right) = 4$$

問題  $y = 2 \cos x, y = \sin 2x, 0 \leq x \leq 2\pi$

1. 次の曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

例題

$x = t^2, y = 2t - t^2$

$x$  切片は  $y = 2t - t^2 = 0$  より,  $t = 0, 2$

$t = 0$  のとき,  $x = 0^2 = 0$

$t = 2$  のとき,  $x = 2^2 = 4$

$\frac{dx}{dt} = 2t$  より,  $dx = 2t dt$

$$S = \int_0^4 y dx = \int_0^2 (2t - t^2) \times 2t dt$$
$$= \int_0^2 (2t - t^2) \times 2t dt = \int_0^2 (4t^2 - 2t^3) dt$$
$$= \left[ \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^2 = \left( \frac{32}{3} - 8 \right) - 0 = \frac{8}{3}$$

問題①

$x = 2t, y = t - t^2$

問題②

$x = t^3, y = 4t - t^2$

2. 次の曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題

$$\begin{cases} x = 2(\theta - \sin \theta) \\ y = 2(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

曲線と  $x$  軸の共有点の  $x$  座標は

$0(\theta = 0), 4\pi(\theta = 2\pi)$  である。

$x = 2(\theta - \sin \theta)$  より  $dx = 2(1 - \cos \theta) d\theta$

$$S = \int_0^{4\pi} y dx = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos \theta) \times 2(1 - \cos \theta) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos \theta)^2 d\theta$$
$$= 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$
$$= 4 \int_0^{2\pi} \left( 1 - 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$
$$= 4 \left[ \frac{3}{2}\theta - 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$
$$= 4 \times \frac{3}{2} \times 2\pi = 12\pi$$

問題

$$\begin{cases} x = 4(\theta - \sin \theta) \\ y = 4(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$



1. 次の曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

2. 次の曲線と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

例題

$$x = 2t, y = 6t - 3t^2$$

$$x \text{ 切片は } y = 6t - 3t^2 = 0 \text{ より, } t = 0, 2$$

$$t = 0 \text{ のとき, } x = 2 \times 0 = 0$$

$$t = 2 \text{ のとき, } x = 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ より, } dx = 2 dt$$

$$S = \int_0^4 y dx = \int_0^2 (6t - 3t^2) \times 2 dt$$

$$= \int_0^2 (12t - 6t^2) dt$$

$$= \left[ 6t^2 - 2t^3 \right]_0^2 = (24 - 16) - 0 = 8$$

問題①

$$x = 2t, y = 3t - t^2$$

問題②

$$x = t^2, y = 3t - t^2$$

例題

$$x = \cos^4 \theta, y = \sin^4 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ において } x \geq 0, y \geq 0$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -4 \cos^3 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 4 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$\theta$	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	0
$\frac{dy}{d\theta}$	0	+	0
$(x, y)$	(1, 0)	↖	(0, 1)

$$S = \int_0^1 y dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \theta \times (-4 \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \times \cos^3 \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \times (1 - \sin^2 \theta) \times \cos \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta - \sin^7 \theta) \times \cos \theta d\theta$$

$$= 4 \left[ \frac{1}{6} \sin^6 \theta - \frac{1}{8} \sin^8 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

問題

$$x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

1. 次の楕円の面積  $S$  を求めよ。

例題  $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

$y \geq 0$  のとき,  $y$  について解くと  $y = \frac{3}{4} \sqrt{4^2 - x^2}$

求める面積  $S$  は楕円の上半分の面積の 2 倍である。

$$S = 2 \int_{-4}^4 \frac{3}{4} \sqrt{4^2 - x^2} \, dx$$
$$= \frac{3}{2} \int_{-4}^4 \sqrt{4^2 - x^2} \, dx = 3 \int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2} \, dx$$
$$= 3 \times \frac{1}{4} \pi \times 4^2 = 12 \pi$$

$\therefore \int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2} \, dx$  は半径 4 の円の面積の  $\frac{1}{4}$

問題①  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

問題②  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

2. 次の曲線で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ。

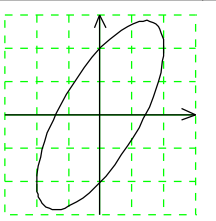
例題  $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 4 = 0$$

$y$  について解くと  $y = x \pm \sqrt{4 - x^2}$

$x$  の存在する範囲は  $-2 \leq x \leq 2$

面積は  $y = x \pm \sqrt{4 - x^2}$  で挟まれる部分より

$$S = \int_{-2}^2 \left\{ \left( x + \sqrt{4 - x^2} \right) - \left( x - \sqrt{4 - x^2} \right) \right\} dx$$
$$= \int_{-2}^2 2 \sqrt{4 - x^2} \, dx = 4 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx = 4 \pi$$


問題①  $2x^2 + 2xy + y^2 = 9$

問題②  $5x^2 - 2xy + y^2 = 1$

1. 次の曲線とこの曲線に原点から引いた接線および  
x軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題  $y = \log 4x$

この曲線上の点P( $p, \log 4p$ )の接線を求める。

$y' = \frac{1}{x}$  より、点Pの接線の傾きは  $\frac{1}{p}$

接線の方程式は  $y - \log 4p = \frac{1}{p}(x - p)$

接線が原点を通るので、

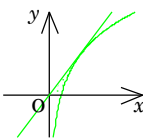
$-\log 4p = -1, \quad 4p = e, \quad p = \frac{e}{4}$

よって 接線の方程式は  $y = \frac{4}{e}x$

$y = \log 4x$  は  $0 < x < \frac{1}{4}$  のとき、 $\log 4x < 0$  より

面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{e}{4} \times 1 - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}} \log 4x \, dx$$
$$= \frac{e}{8} - \left[ x \log 4x - x \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}}$$
$$= \frac{e}{8} - \left\{ \left( \frac{e}{4} - \frac{e}{4} \right) - \left( 0 - \frac{1}{4} \right) \right\}$$
$$= \frac{e}{8} - \frac{1}{4}$$



問題  $y = \log 2x$

2. 次の曲線とこの曲線に原点から引いた接線および  
y軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

例題  $y = e^{2x}$

この曲線上の点P( $p, e^{2p}$ )の接線を求める。

$y' = 2e^{2p}$  より、点Pの接線の傾きは  $2e^{2p}$

接線の方程式は  $y - e^{2p} = 2e^{2p}(x - p)$

接線が原点を通るので、

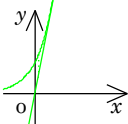
$-e^{2p} = -2pe^{2p}, \quad 1 = 2p, \quad p = \frac{1}{2}$

よって 接線の方程式は  $y = 2ex$

$y = e^{2x}$  は  $0 < x < \frac{1}{2}$  のとき、 $e^{2x} > 2ex$

面積Sは

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x} - 2ex) \, dx$$
$$= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - ex^2 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left( \frac{e}{2} - \frac{e}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} - 0 \right)$$
$$= \frac{e}{4} - \frac{1}{2}$$



問題  $y = e^{\frac{1}{2}x}$