

1. 区分求積法により，次の部分の面積を求めよ。
Find the area of the following part using piecewise quadrature.

例題 $y = x^2$ と $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分

$[0, 1]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{n^3} \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1) \right\}$$

求める部分の面積は $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$

問題 $y = x^3$ と $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分

$$\ast \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n (n+1) \right\}^2$$

$[0, 1]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

2. 次の極限を求めよ。
Find the next limit value.

例題 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$$
$$= \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

問題① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4$

問題② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k \pi}{n} \right)$

3. 次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality.

例題① 区間 $[0, 1]$ において $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$

区間 $[0, 1]$ では $x^2 \geq x^3 \geq 0$ より $1+x^2 \geq 1+x^3 \geq 1$

したがって $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$ Q.E.D

ただし $0 < x < 1$ のとき，等号は成り立たない。

例題② $-\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$

区間 $[0, 1]$ において $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1$ より

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < \int_0^1 dx$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_0^1 dx = 1 \quad \text{であるから}$$
$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$$

問題① $x \geq 0$ のとき

$$\frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

問題② $-\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} < \log 2$

1. 区分求積法により，次の部分の面積を求めよ。

Find the area of the following part using piecewise quadrature.

例題 $y = x^2$ と $x = 0$, $x = 2$ で囲まれた部分

$[0, 2]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

$$S_n = \frac{2}{n} \left\{ \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{4}{n} \right)^2 + \left(\frac{6}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n}{n} \right)^2 \right\}$$
$$= \frac{8}{n^3} \left\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 \right\}$$
$$= \frac{8}{n^3} \left\{ \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1) \right\}$$

求める部分の面積は $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{3}$

問題 $y = x$ と $x = 0$, $x = 3$ で囲まれた部分

※ $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n (n+1)$

$[0, 3]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

2. 次の極限を求めよ。

※ $\frac{k}{n} = x$ の式を作る

Find the next limit value.

例題 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2k$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n}$$
$$= \int_0^1 2x \, dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$$

問題 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n+k)$

3. 次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality.

例題① $x > 1$ のとき $\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x^2+x+1} < 1$

$x > 1$ のとき $(x+1)^2 - (x^2+x+1) = x > 0$

$$(x^2+x+1) - 1 = x^2+x > 0 \text{ より}$$
$$(x+1)^2 > x^2+x+1 > 1$$

したがって $\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x^2+x+1} < 1$ Q.E.D

例題② $\frac{1}{6} < \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x+1} < 1$

$x > 1$ のとき, $\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x^2+x+1} < 1$ より

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} < \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x+1} < \int_1^2 dx$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{6}, \quad \int_1^2 dx = 1 \text{ であるから}$$
$$\frac{1}{6} < \int_1^2 \frac{dx}{x^2+x+1} < 1$$

問題① $x > 1$ のとき $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2-x+1} \leq \frac{1}{x}$

問題② $\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{dx}{x^2-x+1} < \log 2$

1. 区分求積法により、次の部分の面積を求めよ。

Find the area of the following part using piecewise quadrature.

例題

$y = x^3$ と $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分

$[0, 1]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^3 + \left(\frac{n}{n} \right)^3 \right\}$$
$$= \frac{1}{n^4} \left\{ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 \right\}$$
$$= \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{1}{2} n (n+1) \right\}^2$$

求める部分の面積は $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$

問題

$y = x^2$ と $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた部分

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

$[0, 1]$ を n 等分して各区間の右端の値に対応する y 座標を高さとする n 個の長方形の面積の和 S_n は

2. 次の極限を求めよ。

Find the next limit value.

例題

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}$$
$$= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

問題

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k \pi}{2n} \right)$$

3. 次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality.

例題①

$x > 0$ のとき $\frac{1}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^3+1} < 1$

$x > 0$ のとき $(x+1)^3 - (x^3+1) = 3x^3 + 3x > 0$
 $(x^3+1) - 1 = x^3 > 0$ より

$(x+1)^3 > x^3+1 > 1$

したがって $\frac{1}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^3+1} < 1$ Q.E.D

例題②

$\frac{3}{8} < \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} < 1$

$x > 1$ のとき, $\frac{1}{(x+1)^3} < \frac{1}{x^3+1} < 1$ より

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} < \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} < \int_0^1 dx$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{8}{3}, \quad \int_1^2 dx = 1 \quad \text{であるから}$$
$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} < 1$$

問題①

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

問題②

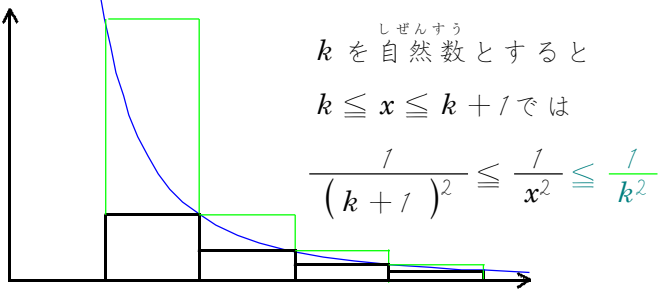
$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x^3}} < \frac{\pi}{4}$

例題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ を考えると

$f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$ になり、 $f(x)$ は単調減少になる。
monotonically decreasing



常に $\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{x^2}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$$

すなわち $\frac{1}{(k+1)^2} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ として、各辺を加えると

(左辺) $= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

(右辺) $= \int_1^2 \frac{dx}{x^2} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^2}$
 $= \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{n}$

よって $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$

別解 数学的帰納法 Mathematical induction

[1] $n = 2$ のとき、 $\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$ より成り立つ
true

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると Assuming it holds true

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{k}$$

両辺に $\frac{1}{(k+1)^2}$ を加えると

(左辺) $= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$

(右辺) $= 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{k+1} \right\} - \left\{ 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \text{ であるから}$$

$$1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1 - \frac{1}{k+1}$$

よって、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、2以上の自然数で成り立つ。

問題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality

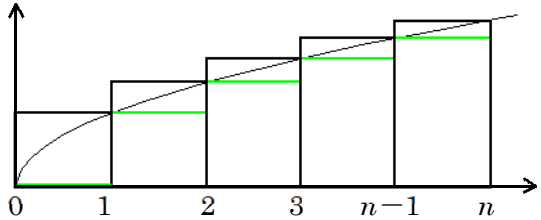
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

れいだい
例題

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} > \frac{2}{3} n \sqrt{n}$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を考えると

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, $f(x)$ は単調増加になる。



k を 0 以上の整数とすると $k \leq x \leq k+1$ では

$$\sqrt{k+1} \geq \sqrt{x} \geq \sqrt{k}$$

常に $\sqrt{k+1} = \sqrt{x}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \sqrt{k+1} \, dx > \int_k^{k+1} \sqrt{x} \, dx$$

すなわち $\sqrt{k+1} > \int_k^{k+1} \sqrt{x} \, dx$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ として、各辺を加えると

(左辺) $= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$

(右辺) $= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \int_1^2 \sqrt{x} \, dx + \cdots + \int_{n-1}^n \sqrt{x} \, dx$
 $= \int_0^n \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} n \sqrt{n}$

よって $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} > \frac{2}{3} n \sqrt{n}$

べっかい
別解 数学的帰納法

[1] $n = 1$ のとき、 $\sqrt{1} > \frac{2}{3}$ より成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} > \frac{2}{3} k \sqrt{k}$$

両辺に $\sqrt{k+1}$ を加えると

(左辺) $= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$

(右辺) $= \frac{2}{3} k \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$

$$\left\{ \frac{2}{3} k \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \right\} - \left\{ \frac{2}{3} (k+1) \sqrt{k+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 2k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) + \sqrt{k+1} \right\} > 0$$

$$\frac{2}{3} k \sqrt{k} + \sqrt{k+1} > \frac{2}{3} (k+1) \sqrt{k+1}$$

よって、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数で成り立つ。

※ $g(x) = 2x(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) + \sqrt{x+1}$ とすると

$g(1) = 2 - \sqrt{2} > 0$, $x \rightarrow \infty$ のとき $g(x) = 0$

$g'(x) < 0$ よって、 $x > 0$ のとき $g(x) > 0$

もんだい
問題

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \log(n+1)$$

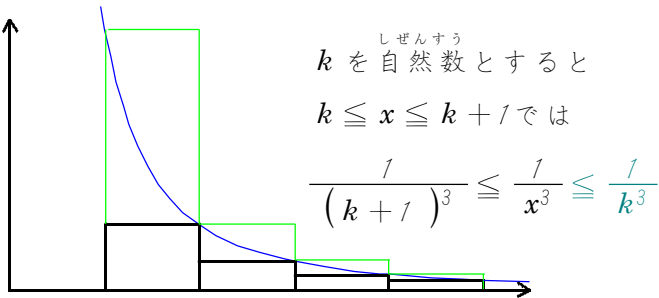
例題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ を考えると

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0$$

になり、 $f(x)$ は単調減少になる。



通常には $\frac{1}{(k+1)^3} = \frac{1}{x^3}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^3} dx < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3}$$

すなわち $\frac{1}{(k+1)^3} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^3}$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ として、各辺を加えると

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \\ \text{(右辺)} &= \int_1^2 \frac{dx}{x^3} + \int_2^3 \frac{dx}{x^3} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^3} \\ &= \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$

別解 数学的帰納法

[1] $n = 2$ のとき、 $\frac{1}{2^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ より成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}$$

両辺に $\frac{1}{(k+1)^3}$ を加えると

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3} \\ \text{(右辺)} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{(k+1)^3} \end{aligned}$$
$$\left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)^2} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{(k+1)^3} \right\}$$
$$= \frac{3}{2} \frac{k+1}{k^2(k+1)^2} > 0 \quad \because k > 0$$

よって $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、2以上の自然数で成り立つ。

問題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

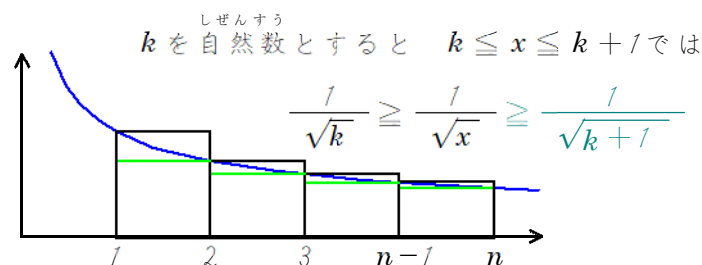
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2} \left(n^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$$

例題 $n \geq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ を考えると

$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$, $f(x)$ は単調減少になる。



通常には $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$k = 1, 2, \dots, n$ として、各辺を加えると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(\text{右辺}) = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n+1} - 2$$

$$\text{よって } \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

別解 数学的帰納法

[1] $n = 1$ のとき、 $\frac{1}{1} > 2\sqrt{2} - 2$ より成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2$$

両辺に $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ を加えると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$(\text{右辺}) = 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\left\{ 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right\} - \left\{ 2\sqrt{k+2} - 2 \right\}$$

$$= \left\{ 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right\} > 0$$

$$2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} - 2$$

よって、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数で成り立つ。

※ $g(x) = 2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ とすると

$$x > 0 \text{ のとき } g(1) > 0, x \rightarrow \infty \text{ のとき } g(x) = 0$$

, $g'(x) < 0$ よって、 $x > 0$ のとき、 $g(x) > 0$

問題 $n \geq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

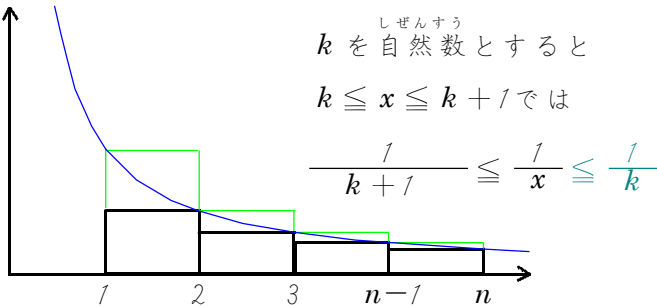
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{n}{n+1}$$

例題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ を考えると

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ になり、 $f(x)$ は単調減少になる。



k を自然数とすると $k \leq x \leq k+1$ では

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$$

常に $\frac{1}{x} = \frac{1}{k+1}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ として、各辺を加えると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} \\ &= \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

別解 数学的帰納法

[1] $n = 2$ のとき、 $\frac{1}{2} < \log 2 \doteq 0.7$ より成り立つ

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} < \log k$$

両辺に $\frac{1}{k+1}$ を加えると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

$$(\text{右辺}) = \log k + \frac{1}{k+1}$$

$$\left\{ \log(k+1) \right\} - \left\{ \log k + \frac{1}{k+1} \right\} > 0$$

よって、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、2以上の自然数で成り立つ。

※ $g(x) = \log(x+1) - \log x + \frac{1}{x+1}$ とすると

$x > 0$ のとき $g(1) > 0$, $x \rightarrow \infty$ のとき $g(x) = 0$,

$g'(x) < 0$ よって、 $x > 0$ のとき、 $g(x) > 0$

問題 $n \geq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3} (n+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}$$

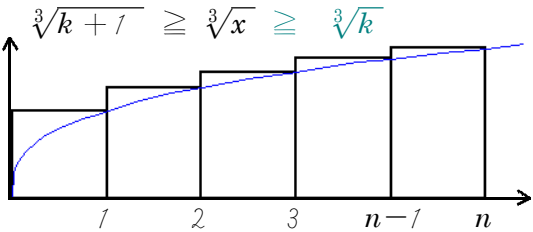
例題 $n \geq 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n} > \frac{3}{4} n \sqrt[3]{n}$$

$x > 0$ の範囲で、関数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ を考えると

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} > 0, \quad f(x) \text{ は単調増加になる。}$$

k を自然数とすると $k \leq x \leq k+1$ では



常に $\sqrt[3]{k+1} = \sqrt[3]{x}$ ではないから

$$\int_k^{k+1} \sqrt[3]{k+1} \, dx > \int_k^{k+1} \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$\text{すなわち } \sqrt[3]{k+1} > \int_k^{k+1} \sqrt[3]{x} \, dx$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ として、各辺を加えると

$$(\text{左辺}) = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx + \int_1^2 \sqrt[3]{x} \, dx + \cdots + \int_{n-1}^n \sqrt[3]{x} \, dx \\ &= \int_0^n \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{4} n \sqrt[3]{n} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n} > \frac{3}{4} n \sqrt[3]{n}$$

別解 数学的帰納法

[1] $n = 1$ のとき、 $\sqrt[3]{1} > \frac{3}{4}$ より成り立つ

[2] $n = k$ のとき、成り立つとすると

$$\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{n} > \frac{3}{4} k \sqrt[3]{k}$$

両辺に $\sqrt[3]{k+1}$ を加えると

$$(\text{左辺}) = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k+1}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{3}{4} k \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k+1}$$

$$\left\{ \frac{3}{4} k \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k+1} \right\} - \left\{ \frac{3}{4} (k+1) \sqrt[3]{k+1} \right\} > 0$$

よって、 $n = k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] より、すべての自然数で成り立つ。

$$\text{※ } g(x) = \frac{1}{4} \left\{ 3x \sqrt[3]{x} + 4 \sqrt[3]{x+1} - 3(k+1) \sqrt[3]{k+1} \right\}$$

$$g(1) > 0, \quad x \rightarrow \infty \text{ のとき } g(x) = 0$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{よって、} x > 0 \text{ のとき、} g(x) > 0$$

問題 $n \geq 2$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$