数学Ⅲ　定積分と微分の関係 ①　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1. 次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，説明を完成せよ。

Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

a を定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を考える。

x によって値が定まるので $\boxed{}$ の関数である。

$F'(t) = f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = \boxed{F() - F()}$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \boxed{F'() - } = \boxed{(x)}$$

2. 次の関数の導関数を求めよ。

Find the derivative of the following function.

例題①　$G(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{x} \sin t\,dt$

$G'(x) = \sin x$

問題①　$G(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$

例題②　$G(x) = \displaystyle\int_1^x t\,e^t\,dt$

$G'(x) = x\,e^x$

問題②　$G(x) = \displaystyle\int_e^x t\log t\,dt \quad (x > 0)$

例題③　$G(x) = \displaystyle\int_0^x x\sin t\,dt = x\int_0^x \sin t\,dt$

$$G'(x) = (x)'\int_0^x \sin t\,dt + x\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt$$

$$= \Big[-\cos t\Big]_0^x + x\sin x$$

$$= -\cos x + \cos 0 + x\sin x$$

$$= x\sin x - \cos x + 1$$

問題③　$G(x) = \displaystyle\int_0^x x\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt$

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

Find the function $f(x)$ that satisfies the following equality.

例題　$f(x) = \cos x + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ は定数なので a とおくと

$f(x) = \cos x + a$　とおける。

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + a)\,dt = \Big[\sin t + a\,t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} + a\times\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin 0 + 0\right)$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}a$$

$$a - \frac{\pi}{2}a = 1$$

$$\therefore\quad a = \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{2-\pi}$$

$$f(x) = \cos x + \frac{2}{2-\pi}$$

問題　$f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$

数学Ⅲ　定積分と微分の関係 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1. 次の文章の[　　]を埋めて，説明を完成せよ。

Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

$\int f(t)\,dt = F(t) + C$ とすると

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{h(x)}^{g(x)}$$

$$= \boxed{F(\qquad) - F(\qquad)}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \boxed{\{F(\qquad) - F(\qquad)\}'}$$

$$= \boxed{F'(\qquad) \qquad - F'(\qquad)}$$

$$= \boxed{f(\qquad) \qquad - f(\qquad)}$$

2. 次の関数の導関数を求めよ。

Find the derivative of the following function.

例題① $G(x) = \int_0^x \cos t\,dt$

$G'(x) = \cos x$

問題① $G(x) = \int_0^x \log t\,dt$

例題② $G(x) = \int_1^{2x} e^t\,dt$

$G'(x) = e^{2x} \times (2x)' = 2e^{2x}$

問題② $G(x) = \int_0^{3x} t\,e^t\,dt$

例題③ $G(x) = \int_1^x x \log t\,dt = x\int_1^x \log t\,dt$

$$G'(x) = (x)'\int_1^x \log t\,dt + x\frac{d}{dx}\int_1^x \log t\,dt$$

$$= \Big[t\log t - t\Big]_1^x + x \times \log x$$

$$= (x\log x - x) - (0 - 1) + x\log x$$

$$= 2x\log x - x + 1$$

問題③ $G(x) = \int_0^x x\,e^t\,dt$

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

Find the function $f(x)$ that satisfies the following equality.

例題 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)\,e^{-t}\,dt$

$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数なので a とおくと

$f(x) = x + a$ とおける。

$$a = \int_0^1 (t+a)\,e^{-t}\,dt = \int_0^1 (t+a)(-e^{-t})'\,dt$$

$$= \Big[(t+a)(-e^{-t})\Big]_0^1 - \int_0^1 (t+a)'(-e^{-t})\,dt$$

$$= -(1+a)e^{-1} + a + \int_0^1 e^{-t}\,dt$$

$$= -(1+a)e^{-1} + a - e^{-1} + 1$$

$$= a(1 - e^{-1}) - 2e^{-1} + 1$$

よって　$a = \dfrac{-2e^{-1}+1}{e^{-1}} = e - 2$

ゆえに　$f(x) = x + e - 2$

問題 $f(x) = x + \int_0^1 f(t)\,e^t\,dt$

数学Ⅲ　定積分と微分の関係 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　　　)

1． 次の文章の$\boxed{}$を埋めて，説明を完成せよ。

Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

$\int f(t)\,dt = F(t) + C$ とすると

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{h(x)}^{g(x)}$$

$$= \boxed{F(\qquad) - F(\qquad)}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \boxed{\{F(\qquad) - F(\qquad)\}'}$$

$$= \boxed{F'(\qquad)\qquad - F'(\qquad)}$$

$$= \boxed{f(\qquad)\qquad - f(\qquad)}$$

2． 次の関数の導関数を求めよ。

Find the derivative of the following function.

例題①　$G(x) = \int_1^x \log t\,dt$

$G'(x) = \log x$

問題①　$G(x) = \int_0^x e^t\,dt$

例題②　$G(x) = \int_0^{2x} \cos t\,dt$

$G'(x) = \cos 2x \times (2x)' = 2\cos 2x$

問題②　$G(x) = \int_0^{3x} \sin t\,dt$

例題③　$G(x) = \int_0^x x\cos t\,dt = x\int_0^x \cos t\,dt$

$$G'(x) = (x)'\int_0^x \cos t\,dt + x\,\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt$$

$$= \Big[\sin t\Big]_0^x + x \times \cos x$$

$$= (\sin x) - (\sin 0) + x\cos x$$

$$= x\cos x + \sin x$$

問題③　$G(x) = \int_0^x x\sin t\,dt$

3． 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

Find the function $f(x)$ that satisfies the following equality.

例題　$f(x) = x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$ は定数なので a とおくと

$f(x) = x - a$　とおける。

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-a)\sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-a)(-\cos t)'\,dt$$

$$= \Big[(t-a)(-\cos t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)\,dt$$

$$= \Big[(t-a)(-\cos t) + \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \Big[(t-a)(-\cos t) + \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - a = a \qquad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}$$

問題　$f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$