

1. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

2. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

$f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

例題

$$\int x \sin x \, dx = \int x(-\cos x)' \, dx$$
$$= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x) \, dx$$
$$= -x \cos x + \sin x + C$$

問題

$$\int x \cos x \, dx$$

例題

$$\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 (\sin x)' \, dx$$
$$= x^2 \sin x - \int (x^2)' \sin x \, dx$$
$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx$$
$$= x^2 \sin x + 2 x \cos x - 2 \sin x + C$$

問題

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

例題

$$\int \log(x+1) \, dx = \int \log(x+1) \times (x+1)' \, dx$$
$$= (x+1) \log(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1} \, dx$$
$$= (x+1) \log(x+1) - x + C$$
$$= (x+1) \log(x+1) - x + C$$

問題

$$\int \log(x+2) \, dx$$

$$\sin^2 = \frac{1 - \cos 2}{2}, \quad \cos^2 = \frac{1 + \cos 2}{2}$$
$$\sin \cos = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\quad + \quad) + \sin(\quad - \quad) \right\}$$

例題

$$\int \cos^2 x \, dx$$
$$= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

問題

$$\int \sin^2 x \, dx$$

例題

$$\int \sin^2 3x \, dx$$
$$= \int \frac{1 - \cos 6x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$$

問題

$$\int \cos^2 4x \, dx$$

例題

$$\int \sin 2x \cos x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \sin(2x+x) + \sin(2x-x) \right\} \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sin 3x + \sin x \right) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x \right) + C$$
$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問題

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

2. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

$f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

例題

$$\int x e^{-x} dx = \int x(-e^{-x})' dx$$
$$= \int x(-e^{-x}) - (x)'(-e^{-x}) dx$$
$$= -\int x e^{-x} - e^{-x} + C$$

問題

$$\int x e^x dx$$

例題

$$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2(-e^{-x})' dx$$
$$= -\int x^2 e^{-x} - (x^2)'(-e^{-x}) dx$$
$$= -\int x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$
$$= -\int x^2 e^{-x} - 2 \int x e^{-x} - 2 \int e^{-x} + C$$

問題

$$\int x^2 e^x dx$$

例題

$$\int \log x dx = \int \log x \times (x)' dx$$
$$= \int x \log x - (\log x)' x dx$$
$$= \int x \log x - x dx$$
$$= x \log x - x + C$$

問題

$$\int (\log x)^2 dx$$

$$\sin^2 = \frac{1 - \cos 2}{2}, \cos^2 = \frac{1 + \cos 2}{2}$$
$$\sin \cos = \frac{1}{2} \left\{ \sin(+) + \sin(-) \right\}$$
$$\cos \cos = \frac{1}{2} \left\{ \cos(+) + \cos(-) \right\}$$
$$\sin \sin = -\frac{1}{2} \left\{ \cos(+) - \cos(-) \right\}$$

例題

$$\int \cos^2 3x dx$$
$$= \int \frac{1 + \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$$

問題

$$\int \sin^2 4x dx$$

例題

$$\int \cos 3x \cos x dx$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos(3x+x) + \cos(3x-x) \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$$
$$= \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

問題

$$\int \cos 3x \cos 2x dx$$

問題

$$\int \sin 2x \sin x dx$$

1. 次の三角関数を微分せよ。

例題

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

問題

$$\tan x$$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{x \, dx}{\sin^2 x}$$
$$\frac{x \, dx}{\sin^2 x} = -x \left(-\frac{1}{\tan x}\right)' \, dx$$
$$= -\frac{x}{\tan x} - x' \left(-\frac{1}{\tan x}\right) \, dx$$
$$= -\frac{x}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} \, dx$$
$$= -\frac{x}{\tan x} + \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx$$
$$= -\frac{x}{\tan x} + \log |\sin x| + C$$

問題

$$\frac{x \, dx}{\cos^2 x}$$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$x^2 \log x \, dx = \left(-\frac{x^3}{3}\right)' \log x \, dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{3} (\log x)' \, dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} x^2 \, dx$$
$$= -\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C$$

問題

$$x \log x \, dx$$

例題

$$(x+1) e^{-x} \, dx = (x+1) (-e^{-x})' \, dx$$
$$= -(x+1) e^{-x} - (x+1)' (-e^{-x}) \, dx$$
$$= -(x+1) e^{-x} + e^{-x} \, dx$$
$$= -(x+1) e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+2) e^{-x} + C$$

問題

$$x e^x \, dx$$

問題

$$x^2 e^x \, dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{\log x}{x} dx$$

置換積分

$$\log x = t \text{とおくと} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} dx = dt$$
$$\frac{\log x}{x} dx = t dt$$
$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

問題

$$\frac{(\log x)^2}{x} dx$$

置換積分

例題

$$\log x dx = (x)' \log x dx$$
$$= x \log x - x (\log x)' dx$$
$$= x \log x - x \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x \log x - dx$$
$$= x \log x - x + C$$

問題

$$\log (x + 3) dx = (x + 3)' \log (x + 3) dx$$

問題

$$(\log x)^2 dx = (x)' (\log x)^2 dx$$

問題

$$\frac{\log x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x dx$$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$x e^{-x^2} dx$$

置換積分

$$u = -x^2 \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = -2x, \quad du = -2x dx$$
$$x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (-2x) dx$$
$$= -\frac{1}{2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

問題

$$x e^{x^2} dx$$

置換積分

例題

$$x e^{3x} dx = x \left(\frac{1}{3} e^{3x}\right)' dx$$
$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - (x)' \frac{1}{3} e^{3x} dx$$
$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} dx$$
$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

問題

$$x e^{-x} dx = x (-e^{-x})' dx$$

問題

$$x^2 e^{-x} dx = x^2 (-e^{-x})' dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\begin{aligned} \int x \sin 2x \, dx &= \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx \\ &= \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \left(x \right)' \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \int x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \left(-\frac{1}{2} \sin 2x \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

問題

$$\int x \sin 3x \, dx$$

例題

$$\begin{aligned} \int x \cos 4x \, dx &= \int x \left(\frac{1}{4} \sin 4x \right)' dx \\ &= \int x \left(\frac{1}{4} \sin 4x \right) - \left(x \right)' \left(\frac{1}{4} \sin 4x \right) dx \\ &= \int x \left(\frac{1}{4} \sin 4x \right) - \frac{1}{4} \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C \end{aligned}$$

問題

$$\int x \cos 2x \, dx$$

例題

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin 4x \, dx &= \int x^2 \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right)' dx \\ &= \int x^2 \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) - \left(x^2 \right)' \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) dx \\ &= \int x^2 \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \right) + \frac{1}{2} x \cos 4x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} x^2 \cos 4x + \frac{1}{8} x \sin 4x + \frac{1}{32} \cos 4x + C \end{aligned}$$

例題

$$\int x^2 \cos 2x \, dx$$

2. 次の関数を微分せよ。

例題

$$\begin{aligned} y &= \log \left| \sin x \right| \\ y' &= \frac{(\sin x)'}{(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

問題

$$y = -\log \left| \cos x \right|$$

例題

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\tan x} \\ y' &= \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

問題

$$y = \tan x$$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx &= \int x \left(-\frac{1}{\tan x} \right)' dx \\ &= -\int \frac{x}{\tan x} - \left(x \right)' \left(-\frac{1}{\tan x} \right) dx \\ &= -\int \frac{x}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} \, dx \\ &= -\frac{x}{\tan x} + \log \left| \sin x \right| + C \end{aligned}$$

問題

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \int x (\tan x)' dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$x \sin (x+1) dx$$
$$x \sin (x+1) dx = x \{ -\cos (x+1) \}' dx$$
$$= -x \cos (x+1) - (x)' \{ -\cos (x+1) \} dx$$
$$= -x \cos (x+1) + \cos (x+1) dx$$
$$= -x \cos (x+1) + \sin (x+1) + C$$

問題

例題

$$\cos \sqrt{x} dx$$
$$t = \sqrt{x} \text{とおくと, } x = t^2, \frac{dx}{dt} = 2t, dx = 2t dt$$
$$\cos \sqrt{x} dx = 2t \cos t dt = 2t (\sin t)' dt$$
$$= 2t \sin t - (2t)' \sin t dt$$
$$= 2t \sin t - 2 \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C$$
$$= 2 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$$

問題

例題

$$e^{\sqrt{x}} dx$$
$$t = \sqrt{x} \text{とおくと, } x = t^2, \frac{dx}{dt} = 2t, dx = 2t dt$$
$$e^{\sqrt{x}} dx = 2t e^t dt = 2t (e^t)' dt$$
$$= 2t e^t - (2t)' e^t dt$$
$$= 2t e^t - 2 e^t dt = 2t e^t - 2 e^t + C$$
$$= 2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C$$

問題

問題

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。
2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$
$$2x^2 + 3x + 1 \quad x + 2 \overline{) 2x^2 + 3x + 1}$$
$$= (x + 2)(2x - 1) + 3$$
$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2} = (2x - 1) + \frac{3}{x + 2}$$

問題

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$$

例題

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$$
$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x(x + 1)^2}$$
$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{(x + 1)^2}$$
$$\frac{a(x^2 + 2x + 1) + b(x^2 + x) + cx}{x(x + 1)^2}$$
$$a + b = 0, 2a + b + c = 2, a = 1 \text{ より}$$
$$a = 1, b = -1, c = 1 \text{ になり}$$
$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2}$$

問題

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2}$$

例題

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2} dx$$
$$= \left(2x - 1 + \frac{3}{x + 2} \right) dx$$
$$= x^2 - x + 3 \log |x + 2| + C$$

問題

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} dx$$

例題

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$
$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx$$
$$= \log |x| - \log |x + 1| - \frac{1}{x + 1} + C$$

問題

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2} dx$$

例題

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} dx$$
$$= \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx$$
$$= \log |x + 1| - \log |x + 2| + C$$

問題

$$\frac{1}{(x + 2)(x + 3)} dx$$

問題

$$\frac{2}{x(x + 2)} dx$$

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 3}$$
$$2x^2 + 5x - 1 \quad x + 3 \overline{) 2x^2 + 5x - 1}$$
$$= (x + 3)(2x - 1) + 2$$
$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 3} = (2x - 1) + \frac{2}{x + 3}$$

問題

$$\frac{2x^2 + 4x + 2}{x + 2}$$

例題

$$\frac{1}{x^3 + x^2}$$
$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2(x + 1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$
$$a = \frac{1}{x^2(x + 1)} \times x^2 \Big|_{x=0} = \frac{1}{(0 + 1)} = 1$$
$$c = \frac{1}{x^2(x + 1)} \times (x + 1) \Big|_{x=-1} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$
$$x = 1 \text{ のとき,}$$
$$\frac{1}{1^3 + 1^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{b}{1} + \frac{1}{1 + 1} \quad \text{より } b = -1$$
$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}$$

問題

$$\frac{4}{x^3 + 2x^2}$$

例題

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 3} dx$$
$$= \left(2x - 1 + \frac{2}{x + 3} \right) dx$$
$$= x^2 - x + 2 \log |x + 3| + C$$

問題

$$\frac{2x^2 + 4x + 2}{x + 2} dx$$

例題

$$\frac{1}{x^3 + x^2} dx$$
$$= \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} \right) dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \log |x| + \log |x + 1| + C$$

問題

$$\frac{4}{x^3 + 2x^2} dx$$

例題

$$\frac{1}{(x + 3)(x + 4)} dx$$
$$= \left(\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 4} \right) dx$$
$$= \log |x + 3| - \log |x + 4| + C$$

問題

$$\frac{1}{x(x + 1)} dx$$

問題

$$\frac{3}{x(x + 3)} dx$$

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2}$$
$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2} = \frac{7x+8}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$a = \frac{7x+8}{(x+1)(x+2)} \times (x+1) \Big|_{x=-1} = \frac{7(-1)+8}{(-1+2)} = 1$$
$$b = \frac{7x+8}{(x+1)(x+2)} \times (x+2) \Big|_{x=-2} = \frac{7(-2)+8}{(-2+1)} = 6$$
$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{6}{x+2}$$

問題

$$\frac{2x+1}{x^2-x}$$

例題

$$\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}$$
$$\begin{array}{r} x^3+2 \\ x^2+3x+2 \overline{) x^3 + 2} \\ \underline{x^3+3x^2+2x} \\ -3x^2-2x+2 \\ \underline{-3x^2-9x-6} \\ 7x+8 \end{array}$$
$$\frac{x^3+2}{x^2+3x+2} = x-3 + \frac{7x+8}{x^2+3x+2}$$
$$= x-3 + \frac{1}{x+1} + \frac{6}{x+2}$$

例題

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-x}$$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{x^3+2}{x^2+3x+2} dx$$
$$= \left(x-3 + \frac{1}{x+1} + \frac{6}{x+2} \right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \log|x+1| + 6 \log|x+2| + C$$

問題

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-x} dx$$

問題

$$\frac{2x^3+2x^2+6}{x^2+2x} dx$$

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。
2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{2x^2 - 3}{x - 2}$$
$$2x^2 - 3 = (x - 2)(2x + 4) + 5$$
$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2} = (2x + 4) + \frac{5}{x - 2}$$

問題

$$\frac{2x^2 - 4}{x - 1}$$

例題

$$\frac{2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$
$$\frac{2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x(x - 1)^2}$$
$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$$
$$\frac{a(x^2 - 2x + 1) + b(x^2 - x) + cx}{x(x - 1)^2}$$

$a + b = 0, -2a - b + c = 2, a = 1$ より

$a = 1, b = -1, c = 3$ になり

$$\frac{2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

問題

$$\frac{3x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$$

例題

$$\frac{2x^2 - 3}{x - 2} dx$$
$$= \left(2x + 4 + \frac{5}{x - 2} \right) dx$$
$$= x^2 + 4x + 5 \log |x - 2| + C$$

問題

$$\frac{2x^2 - 4}{x - 1} dx$$

例題

$$\frac{2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$
$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} \right) dx$$
$$= \log |x| - \log |x - 1| - \frac{3}{x - 1} + C$$

問題

$$\frac{3x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

例題

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 3)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\log |x + 1| - \log |x + 3| \right) + C$$

問題

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 4)} dx$$

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$
$$2x^2 + 3x + 2 \quad x + 1 \overline{) 2x^2 + 3x + 2}$$
$$= (x + 1)(2x + 1) + 1$$
$$\frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} = (2x + 1) + \frac{1}{x + 1}$$

問題

$$\frac{2x^2 + 4x + 3}{x + 1}$$

例題

$$\frac{1}{x(x + 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x + 1)^2} + \frac{c}{x + 1}$$
$$a = \frac{1}{x(x + 1)^2} \times x \Big|_{x=0} = \frac{1}{0(0 + 1)^2} = 1$$
$$b = \frac{1}{x(x + 1)^2} \times (x + 1)^2 \Big|_{x=-1} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$x = 1 \text{ のとき,}$$
$$\frac{1}{1(1 + 1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{-1}{(1 + 1)^2} + \frac{c}{1 + 1} \quad c = -1$$
$$\frac{1}{x(x + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1}$$

問題

$$\frac{1}{x(x - 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x - 1}$$

例題

$$\frac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1} dx$$
$$= \left(2x + 2 + \frac{1}{x + 1} \right) dx$$
$$= x^2 + 2x + \log |x + 1| + C$$

問題

$$\frac{2x^2 + 4x + 3}{x + 1} dx$$

例題

$$\frac{1}{x(x + 1)^2}$$
$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1} \right)$$
$$= \log |x| + \frac{1}{x + 1} - \log |x + 1| + C$$

問題

$$\frac{1}{x(x + 1)^2} x$$

例題

$$\frac{1}{x(x - 3)} dx$$
$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x} \right) dx$$
$$= \frac{1}{3} \left(\log |x - 3| - \log |x| \right) + C$$

問題

$$\frac{1}{x(x - 2)} dx$$

1. 次の三角関数を $\cos 2x$ を用いて表せ。

例題 $\sin^2 x$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

よって, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

問題 $\cos^2 x$

2. 次の積和公式を作れ。

例題 $\sin \cos$

$$\begin{aligned}\sin(+)&= \sin \cos + \cos \sin \dots \\ \sin(-)&= \sin \cos - \cos \sin \dots \\ + \text{より} \\ \sin(+)+\sin(-)&= 2\sin \cos \\ \sin \cos &= \frac{1}{2}\{\sin(+)+\sin(-)\}\end{aligned}$$

問題 $\cos \sin$

例題 $\sin \sin$

$$\begin{aligned}\cos(+)&= \cos \cos - \sin \sin \dots \\ \cos(-)&= \cos \cos + \sin \sin \dots \\ - \text{より} \\ \cos(+)-\cos(-)&= -2\sin \sin \\ \sin \sin &= -\frac{1}{2}\{\cos(+)-\cos(-)\}\end{aligned}$$

問題 $\cos \cos$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題 $(\sin 2x + \cos 3x + 1)dx$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + x + C$$

問題 $(\sin 4x + \cos 6x + 1)dx$

例題 $\cos^2 x \sin x dx$

$$\begin{aligned}u &= \cos x \text{とおくと } du = -\sin x dx \\ \cos^2 x \sin x dx &= -\cos^2 x(-\sin x) dx \\ &= -u^2 du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

問題 $\cos^3 x \sin x dx$

例題 $\cos^2 2x dx$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C\end{aligned}$$

問題 $\sin^2 3x dx$

例題 $\sin 4x \cos x dx$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 3x) dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x + C\end{aligned}$$

問題 $\sin 3x \sin x dx$

1. 次の関数を微分せよ。

例題

$$y = \tan x$$
$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問題

$$y = \frac{1}{\tan x}$$

2. 次の等式を証明せよ。

例題

$$\frac{1}{\tan^2 x + 1} = \cos^2 x$$
$$\frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1}$$
$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \cos^2 x \quad \text{Q.E.D.}$$

問題

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx$$
$$= \tan x + C$$

問題

$$\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

問題

$$\tan^2 x dx$$

4. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\cos^3 x dx$$
$$= \cos^2 x \cos x dx = (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } du = \cos x dx$$
$$(1 - \sin^2 x) \cos x dx = (1 - u^2) du$$
$$= u - \frac{1}{3} u^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

問題

$$\sin^3 x dx$$

例題

$$\frac{1}{\sin x} dx$$
$$= \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$
$$u = \cos x \text{ とおくと } -\sin x dx = du$$
$$\frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \frac{-\sin x dx}{\cos^2 x - 1} = \frac{du}{u^2 - 1}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) du$$
$$= \frac{1}{2} \left(\log |\cos x - 1| - \log |\cos x + 1| \right) + C$$
$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

問題

$$\frac{1}{\cos x} dx$$

1. 次の関数を微分せよ。

例題

$y = \log \left| \cos x \right|$

$$y' = \frac{(\cos x)'}{(\cos x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\tan x$$

問題

$y = \log \left| \sin x \right|$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題

$\tan x \, dx$

$$= -\log \left| \cos x \right| + C$$

問題

$\frac{1}{\tan x} \, dx$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\begin{aligned} x \sin 3x \, dx &= x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right)' dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x - \left(x \right)' \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C \end{aligned}$$

問題

$x \cos 3x \, dx$

例題

$$\begin{aligned} x^2 \cos 3x \, dx &= x^2 \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right)' dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \left(x^2 \right)' \left(\frac{1}{3} \sin 3x \right) dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} x \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C \end{aligned}$$

問題

$x^2 \sin 3x \, dx$

4. 次の三角関数を $\cos 2x$ を用いて表せ。

例題

$\cos^2 x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

よって, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

問題

$\sin^2 x$

5. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\begin{aligned} \cos^4 x \, dx &= (\cos^2 x)^2 \, dx = \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right\}^2 dx \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right\} dx \\ &= \frac{1}{8} (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) \, dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

問題

$\sin^4 x \, dx$