

1. 次の不定積分を求めよ。
Find the following indefinite integral.

2. 次の不定積分を求めよ。
Find the following indefinite integral.

3. 次の不定積分を求めよ。
Find the following indefinite integral.

微分して検算せよ。
Differentiate and check the calculation.

例題	問題
$x^2 \, dx$ $= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$ $= \frac{1}{3} x^3 + C$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \, dx$ $= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$ $= 2 x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$ $\cos x \, dx$ $= \sin x + C$	$x^3 \, dx$ $\sqrt{x} \, dx$ $\sin x \, dx$

例題	問題
$(x+1)^2 \, dx$ $= \frac{1}{3} (x+1)^3 + C$ $\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ $= 2\sqrt{x-2} + C$ $(2x+1)^2 \, dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} (2x+1)^3 + C$ $= \frac{1}{6} (2x+1)^3 + C$ $\frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ $= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2x-3} + C$ $= \sqrt{2x-3} + C$ $\cos(4x+1) \, dx$ $= \frac{1}{4} \sin(4x+1) + C$	$(x+1)^3 \, dx$ $\sqrt{x+2} \, dx$ $(2x-1)^3 \, dx$ $\sqrt{2x+1} \, dx$ $\sin(3x+1) \, dx$

$$f(x) \, dx = f(g(t)) \frac{dx}{dt} \, dt \quad \text{ただし } x = g(t)$$

例題	問題
$(x+1)^4 \, dx$ $x+1 = t \text{ とおくと } x = t-1, \quad \frac{dx}{dt} = 1$ $(x+1)^4 \, dx = t^4 \times 1 \, dt$ $= \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} (x+1)^5 + C$	$(x+2)^5 \, dx$
$(2x+1)^3 \, dx$ $2x+1 = t \text{ とおくと } x = \frac{t-1}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ $(2x+1)^3 \, dx = t^3 \times \frac{1}{2} \, dt$ $= \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C$	$(3x+2)^2 \, dx$
$x\sqrt{2-x} \, dx$ $2-x = t \text{ とおくと } x = 2-t, \quad \frac{dx}{dt} = -1$ $x\sqrt{2-x} \, dx = (2-t) t^{\frac{1}{2}} \times (-1) \, dt$ $= (t^{\frac{3}{2}} - 2 t^{\frac{1}{2}}) \, dt = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{2}{5} (2-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (2-x)^{\frac{3}{2}} + C$	$x\sqrt{x+1} \, dx$

1. 次の不定積分を求めよ。

$f(g(x))g'(x)dx = f(u)du$ ただし $u = g(x)$

れいだい
例題

$$x(x^2 + 1)^2 dx$$
$$u = x^2 + 1 \text{ とおくと } 2x dx = du$$
$$x(x^2 + 1)^2 dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^2 \times 2x dx$$
$$= \frac{1}{2} u^2 du = \frac{1}{6} u^3 + C = \frac{1}{6} (x^2 + 1)^3 + C$$

もんだい
問題

$$x^2(x^3 + 2)^2 dx$$

れいだい
例題

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$
$$u = x^3 - 1 \text{ とおくと } 3x^2 dx = du$$
$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{3} \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$
$$= \frac{1}{3} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \times u^{-\frac{1}{2} + 1}$$
$$= \frac{2\sqrt{u}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3 - 1}}{3} + C$$

もんだい
問題

$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

れいだい
例題

$$\cos^3 x \sin x dx$$
$$u = \cos x \text{ とおくと } -\sin x dx = du$$
$$\cos^3 x \sin x dx = -\cos^3 x (-\sin x) dx$$
$$= -u^3 du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

もんだい
問題

$$\sin^2 x \cos x dx$$

2. 次の不定積分を求めよ。

$\frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + C$

れいだい
例題

$$\frac{2x dx}{x^2 - 5}$$
$$= \frac{(x^2 - 5)'}{x^2 - 5} dx = \log |x^2 - 5| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{4x dx}{2x^2 - 1}$$

れいだい
例題

$$\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 2) + C$$

もんだい
問題

$$\frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

れいだい
例題

$$\frac{e^x}{e^x - 1} dx$$
$$= \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx = \log |e^x - 1| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log |\sin x| + C$$

もんだい
問題

$$\tan x dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。微分して検算せよ。

れいだい 例題	もんだい 問題
$x^3 \, dx$ $= \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C$ $= \frac{1}{4} x^4 + C$ $\frac{dx}{x^3} = x^{-3} \, dx$ $= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$ $= -\frac{1}{2} x^{-2} + C$ $\frac{dx}{x}$ $= \log x + C$	$x^4 \, dx$ $\frac{dx}{x^4}$ $\frac{dx}{x^2}$

2. 次の不定積分を求めよ。
$$f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

れいだい 例題	もんだい 問題
$(2x+1)^3 \, dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (2x+1)^4 + C$ $= \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C$	$(2x+1)^4 \, dx$
れいだい 例題	
$\frac{dx}{(2x+1)^3}$ $= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (2x+1)^{-2} + C$ $= -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$	
もんだい 問題	
$\frac{dx}{(2x+1)^4}$	

3. 次の不定積分を求めよ。

$$f(x) \, dx = f(g(t)) \frac{dx}{dt} \, dt \quad \text{ただし } x = g(t)$$

れいだい 例題	もんだい 問題
$x(x-1)^5 \, dx$ $x-1 = t \text{ とおくと } x = t+1, \quad \frac{dx}{dt} = 1$ $x(x-1)^5 \, dx = (t+1) t^5 \, dt$ $= (t^6 + t^5) \, dt = \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{6} t^6 + C$ $= \frac{1}{7} (x-1)^7 + \frac{1}{6} (x-1)^6 + C$	$x(x+1)^4 \, dx$
れいだい 例題	
$x\sqrt{x+2} \, dx$ $x+2 = t \text{ とおくと } x = t-2, \quad \frac{dx}{dt} = 1$ $x\sqrt{x+2} \, dx = (t-2) t^{\frac{1}{2}} \, dt$ $= \left(t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) \, dt = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} + C$ $\left(\begin{aligned} &\sqrt{x+2} = t \text{ とおくと } x = t^2 - 2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t \\ &x\sqrt{x+2} \, dx = (t^2 - 2) t \times (2t) \, dt \\ &= (2t^4 - 4t^2) \, dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 + C \\ &= \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned} \right)$	$x\sqrt{x-1} \, dx$
もんだい 問題	

1. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$e^{2x}(e^{2x} + 1)^2 dx$$
$$u = e^{2x} + 1 \text{ とおくと } 2 e^{2x} dx = du$$
$$e^{2x}(e^{2x} + 1)^2 dx = \frac{1}{2} (e^{2x} + 1)^2 \times 2 e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2} u^2 du = \frac{1}{6} u^3 + C = \frac{1}{6} (e^{2x} + 1)^3 + C$$

もんだい
問題

$$e^x(e^x - 1)^3 dx$$

れいだい
例題

$$x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$
$$u = x^3 + 1 \text{ とおくと } 3 x^2 dx = du$$
$$x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \sqrt{x^3 + 1} \times 3 x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3} \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \times u^{\frac{1}{2} + 1}$$
$$= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

もんだい
問題

$$x \sqrt{x^2 + 3} dx$$

れいだい
例題

$$\sin^3 x \cos x dx$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x dx = du$$
$$\sin^3 x \cos x dx = u^3 du$$
$$= \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

もんだい
問題

$$\cos^2 x \sin x dx$$

2. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + C$$
$$= \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx = \log |x^2 - 1| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{2x + 1}{x^2 + x} dx$$

れいだい
例題

$$\frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 4x + 3)'}{x^2 + 4x + 3} dx$$
$$= \frac{1}{2} \log |x^2 + 4x + 3| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 5} dx$$

れいだい
例題

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^x} dx$$
$$= \frac{(1 - e^{-x})'}{1 - e^{-x}} dx = \log |1 - e^{-x}| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$$

れいだい
例題

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$$
$$= \frac{(1 - \cos x)'}{1 - \cos x} dx = \log |1 - \cos x| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。

2. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\frac{dx}{(3x-1)^2}$$
$$\frac{dx}{(3x-1)^2} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3x-1} \right) + C$$
$$= -\frac{1}{9x-3} + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{(2x-1)^2}$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{4x-1}$$
$$\frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \log |4x-1| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{5x-1}$$

れいだい
例題

$$\frac{x+2}{x^2+4x+3} dx$$
$$\frac{x+2}{x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+4x+3)'}{(x^2+4x+3)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \log |x^2+4x+3| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{1+e^x}$$
$$\frac{dx}{1+e^x} = \frac{e^{-x} dx}{(1+e^x)e^{-x}} = \frac{e^{-x} dx}{e^{-x}+1}$$
$$= -\frac{(e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)} dx = -\log(e^{-x}+1) + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{1+e^{-x}}$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$$
$$t = \sqrt{x+2} \text{ とおくと } x = t^2 - 2$$
$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad dx = 2t dt$$
$$\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \frac{2t dt}{(t^2-1)t}$$
$$= \frac{2 dt}{t^2-1} = \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$
$$= \log |t-1| - \log |t+1| + C$$
$$= \log |\sqrt{x+2}-1| - \log |\sqrt{x+2}+1| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+3}}$$

れいだい
例題

$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$u = x^2+2 \text{ とすると } \frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx$$
$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} + C$$
$$= \sqrt{x^2+2} + C$$

もんだい
問題

$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

1. つぎふていせきぶんもと
次の不定積分を求めよ。

2. つぎふていせきぶんもと
次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\sin^3 x \, dx$$
$$= (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$
$$u = \cos x \text{ とおくと } -\sin x \, dx = du$$
$$(1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$
$$= - (1 - \cos^2 x) (-\sin x) \, dx$$
$$= - (1 - u^2) du$$
$$= -u + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

もんだい
問題

$$\cos^3 x \, dx$$

れいだい
例題

$$\frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x \, dx = du$$
$$\frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$$
$$= \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2} u^{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C$$

もんだい
問題

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

れいだい
例題

$$\frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= -\frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\log |\cos x| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{\cos x}$$
$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x \, dx = du$$
$$\frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \frac{du}{1 - u^2}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right) du$$
$$= \frac{1}{2} \left(\log |1 + \cos x| - \log |1 - \cos x| \right) + C$$
$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{\sin x}$$

1. 次の関数を微分せよ。

れいだい
例題

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

もんだい
問題

$$y = \frac{1}{\tan x}$$

2. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\frac{dx}{\tan x}$$
$$t = \sin x \text{とおくと, } \frac{dt}{dx} = \cos x, \cos x dx = dt$$
$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{1}{t} dt$$
$$= \log |t| + C = \log |\sin x| + C$$

もんだい
問題

$$\tan x dx$$

れいだい
例題

$$x \sin x^2 dx$$
$$t = x^2 \text{とおくと, } \frac{dt}{dx} = 2x, x dx = \frac{1}{2} dt$$
$$x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sin t dt$$
$$= -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

もんだい
問題

$$x \cos x^2 dx$$

3. 次の等式を証明せよ。

れいだい
例題

$$\frac{1}{\tan^2 x} + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\tan^2 x} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{Q.E.D.}$$

もんだい
問題

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

4. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\frac{dx}{\tan^3 x}$$
$$\frac{dx}{\tan^3 x} = \frac{1}{\tan x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan x} \right) dx$$
$$= \left\{ -\left(-\frac{1}{\tan x}\right) \left(-\frac{1}{\tan x}\right)' - \frac{1}{\tan x} \right\} dx$$
$$= -\frac{1}{2 \tan^2 x} - \log |\sin x| + C$$

もんだい
問題

$$\tan^3 x dx$$

1. $\tan \frac{x}{2} = t$ のとき , 次のことを示せ。

例題

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\sin x = \sin \left(2 \times \frac{x}{2} \right)$$
$$= 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \times \cos^2 \frac{x}{2}$$
$$= 2 \tan \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

問題

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

問題

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+t^2}{2}$$

2. $\tan \frac{x}{2} = t$ のとき , 次の式を t で表せ。

例題

$$\frac{1}{1+\sin x}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$
$$= \frac{1+t^2}{1+2t+t^2} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$$

問題

$$\frac{1}{1+\cos x}$$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題

$$\frac{dx}{\sin x}$$
$$= \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{dt}{t}$$
$$= \log |t| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

問題

$$\frac{dx}{\cos x}$$

例題

$$\frac{dx}{1+\sin x}$$
$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと, } dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$\frac{dx}{1+\sin x}$$
$$= \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$= \frac{2}{(1+t)^2} dt$$
$$= -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C$$

問題

$$\frac{dx}{1+\cos x}$$

1. $\tan \frac{x}{2} = t$ のとき, 次のことを示せ。

れいだい
例題

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
 を示せ。

$$1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$
 より

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \cos \left(2 \times \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

もんだい
問題

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$
 を示せ。

もんだい
問題

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}$$
 を示せ。

2. $\tan \frac{x}{2} = t$ のとき, 次の式を t で表せ。

れいだい
例題

$$\frac{1}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{2t^2}$$

もんだい
問題

$$\frac{1}{1 - \sin x}$$

3. 次の不定積分を求めよ。

れいだい
例題

$$\frac{dx}{\cos x}$$

$$= \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \times \frac{2}{1 + t^2} dt = \frac{2}{1 - t^2} dt$$

$$= \left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt$$

$$= \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + \log \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{\sin x}$$

れいだい
例題

$$\frac{dx}{1 - \cos x}$$

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと, } dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$\frac{dx}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{1 + t^2}{2t^2} \times \frac{2}{1 + t^2} dt$$

$$= \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + C$$

もんだい
問題

$$\frac{dx}{1 - \sin x}$$

1. $\tan \frac{x}{2} = t$ のとき, 次のことを示せ。

例題 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ を示せ。

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \left(2 \times \frac{x}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \times \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

問題 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。

問題 $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ を示せ。

2. 次の式を x で微分し, t を使った式で表せ。

例題 $t = \tan x$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \left(\tan x \right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2 \end{aligned}$$

問題 $t = \tan \frac{x}{2}$

3. 次の式を部分分数に分解せよ。

問題 $\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$

$$\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{(a+b)t^2 + ct + a}{t(1+t^2)}$$

係数を比較し, $a = 2, b = -1, c = 0$

$$\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{2}{t} - \frac{t}{1+t^2}$$

問題 $\frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$

4. $t = \tan \frac{x}{2}$ とおき, 次の不定積分を求めよ。

例題 $\frac{1}{\sin x} dx$ $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

問題 $\frac{1}{\tan x} dx$