

1. 次の不定積分を求めよ。 ※微分して検算せよ。  
Find the following indefinite integral. ※Differentiate and check the calculation.

れいだい 例題	もんだい 問題
① $\int x^2 dx$ $= \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$ $= \frac{1}{3} x^3 + C$	① $\int x^3 dx$
② $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$ $= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C$ $= 2 x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$	② $\int \sqrt{x} dx$
③ $\int \cos x dx$ $= \sin x + C$	③ $\int \sin x dx$

2. 次の不定積分を求めよ。 Find the following indefinite integral.

$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

れいだい 例題	もんだい 問題
① $\int (x+1)^2 dx$ $= \frac{1}{3} (x+1)^3 + C$	① $\int (x+1)^3 dx$
② $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ $= 2\sqrt{x-2} + C$	② $\int \sqrt{x+2} dx$
③ $\int (2x+1)^2 dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} (2x+1)^3 + C$ $= \frac{1}{6} (2x+1)^3 + C$	③ $\int (2x-1)^3 dx$
④ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$ $= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2x-3} + C$ $= \sqrt{2x-3} + C$	④ $\int \sqrt{2x+1} dx$
⑤ $\int \cos(4x+1) dx$ $= \frac{1}{4} \sin(4x+1) + C$	⑤ $\int \sin(3x+1) dx$

3. 次の不定積分を求めよ。 Find the following indefinite integral.

$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$  ただし  $x = g(t)$

れいだい 例題① $\int (x+1)^4 dx$ $x+1=t$ とおくと $x=t-1$ , $\frac{dx}{dt}=1$ $\int (x+1)^4 dx = \int t^4 \times 1 dt$ $= \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} (x+1)^5 + C$
もんだい 問題① $\int (x+2)^5 dx$
れいだい 例題② $\int (2x+1)^3 dx$ $2x+1=t$ とおくと $x=\frac{t-1}{2}$ , $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ $\int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \times \frac{1}{2} dt$ $= \frac{1}{8} t^4 + C = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C$
もんだい 問題② $\int (3x+2)^2 dx$
れいだい 例題③ $\int x\sqrt{2-x} dx$ $2-x=t$ とおくと $x=2-t$ , $\frac{dx}{dt}=-1$ $\int x\sqrt{2-x} dx = \int (2-t)t^{\frac{1}{2}} \times (-1) dt$ $= \int (t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{2}{5} (2-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} (2-x)^{\frac{3}{2}} + C$
もんだい 問題③ $\int x\sqrt{x+1} dx$

1. 次の不定積分を求めよ。

2. 次の不定積分を求めよ。

Find the following indefinite integral.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{ただし } u = g(x)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + C$$

れいだい  
例題①

$$\int x(x^2 + 1)^2 dx$$

$$u = x^2 + 1 \text{ とおくと } 2x dx = du$$

$$\int x(x^2 + 1)^2 dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^2 \times 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{6} u^3 + C = \frac{1}{6} (x^2 + 1)^3 + C$$

もんだい  
問題①

$$\int x^2(x^3 + 2)^2 dx$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

$$u = x^3 - 1 \text{ とおくと } 3x^2 dx = du$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \times u^{-\frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{u}}{1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 1} + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

れいだい  
例題③

$$\int \cos^3 x \sin x dx$$

$$u = \cos x \text{ とおくと } -\sin x dx = du$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx = - \int \cos^3 x (-\sin x) dx$$

$$= - \int u^3 du = - \frac{1}{4} u^4 + C = - \frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

もんだい  
問題③

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

れいだい  
例題①

$$\int \frac{2x dx}{x^2 - 5}$$

$$= \int \frac{(x^2 - 5)'}{x^2 - 5} dx = \log |x^2 - 5| + C$$

もんだい  
問題①

$$\int \frac{4x dx}{2x^2 - 1}$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 2x + 2)'}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 2) + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

れいだい  
例題③

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

$$= \int \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx = \log |e^x - 1| + C$$

もんだい  
問題③

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

れいだい  
例題④

$$\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log |\sin x| + C$$

もんだい  
問題④

$$\int \tan x dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。

※微分して検算せよ。

Find the following indefinite integral. ※Differentiate and check the calculation.

れいだい 例題	もんだい 問題
① $\int x^3 \, dx$ $= \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C$ $= \frac{1}{4} x^4 + C$	① $\int x^4 \, dx$
② $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} \, dx$ $= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$ $= -\frac{1}{2} x^{-2} + C$	② $\int \frac{dx}{x^4}$
③ $\int \frac{dx}{x}$ $= \log  x  + C$	③ $\int \frac{dx}{x^2}$

2. 次の不定積分を求めよ。

$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

れいだい 例題① $\int (2x+1)^3 \, dx$ $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} (2x+1)^4 + C$ $= \frac{1}{8} (2x+1)^4 + C$	もんだい 問題① $\int (2x+1)^4 \, dx$
れいだい 例題② $\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$ $= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) (2x+1)^{-2} + C$ $= -\frac{1}{4} (2x+1)^{-2} + C$	もんだい 問題② $\int \frac{dx}{(2x+1)^4}$

3. 次の不定積分を求めよ。

Find the following indefinite integral.

$\int f(x) \, dx = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} \, dt$     ただし  $x = g(t)$

れいだい  
例題①  $\int x(x-1)^5 \, dx$   
 $x-1=t$  とおくと  $x=t+1$  ,     $\frac{dx}{dt}=1$   
 $\int x(x-1)^5 \, dx = \int (t+1)t^5 \, dt$   
 $= \int (t^6+t^5) \, dt = \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{6}t^6 + C$   
 $= \frac{1}{7}(x-1)^7 + \frac{1}{6}(x-1)^6 + C$

もんだい  
問題①  $\int x(x+1)^4 \, dx$

れいだい  
例題②  $\int x\sqrt{x+2} \, dx$   
 $x+2=t$  とおくと  $x=t-2$  ,     $\frac{dx}{dt}=1$   
 $\int x\sqrt{x+2} \, dx = \int (t-2)t^{\frac{1}{2}} \, dt$   
 $= \int (t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}) \, dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}$   
 $= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$   
 $\left( \begin{array}{l} \sqrt{x+2}=t \text{ とおくと } x=t^2-2, \quad \frac{dx}{dt}=2t \\ \int x\sqrt{x+2} \, dx = \int (t^2-2)t \times (2t) \, dt \\ = \int (2t^4-4t^2) \, dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C \\ = \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C \end{array} \right)$

もんだい  
問題②  $\int x\sqrt{x-1} \, dx$

1. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

2. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{ただし } u = g(x)$$

れいだい  
例題①

$$\int e^{2x}(e^{2x}+1)^2dx$$

$$u = e^{2x} + 1 \text{ とおくと } 2e^{2x}dx = du$$

$$\int e^{2x}(e^{2x}+1)^2dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x}+1)^2 \times 2e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2du = \frac{1}{6}u^3 + C = \frac{1}{6}(e^{2x}+1)^3 + C$$

もんだい  
問題①

$$\int e^x(e^x-1)^3dx$$

れいだい  
例題②

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$$

$$u = x^3 + 1 \text{ とおくと } 3x^2dx = du$$

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{x^3+1} \times 3x^2dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \sqrt{u}du = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \times u^{\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

もんだい  
問題②

$$\int x\sqrt{x^2+3}dx$$

れいだい  
例題③

$$\int \sin^3x \cos x dx$$

$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x dx = du$$

$$\int \sin^3x \cos x dx = \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4x + C$$

もんだい  
問題③

$$\int \cos^2x \sin x dx$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \log|g(x)| + C$$

れいだい  
例題①

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$= \int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx = \log|x^2-1| + C$$

もんだい  
問題①

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+3)'}{x^2+4x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2} \log|x^2+4x+3| + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx$$

れいだい  
例題③

$$\int \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$

$$= \int \frac{(1-e^{-x})'}{1-e^{-x}}dx = \log|1-e^{-x}| + C$$

もんだい  
問題③

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$$

れいだい  
例題④

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}dx = \log|1-\cos x| + C$$

もんだい  
問題④

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$$

1. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.
2. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

れいだい

例題①

$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$$
$$\int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \frac{1}{3} \times \left( -\frac{1}{3x-1} \right) + C$$
$$= -\frac{1}{9x-3} + C$$

もんだい

問題①

$$\int \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

れいだい

例題②

$$\int \frac{dx}{4x-1}$$
$$\int \frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \log |4x-1| + C$$

もんだい

問題②

$$\int \frac{dx}{5x-1}$$

れいだい

例題③

$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx$$
$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+3)'}{(x^2+4x+3)} dx$$
$$= \frac{1}{2} \log |x^2+4x+3| + C$$

もんだい

問題③

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

れいだい

例題④

$$\int \frac{dx}{1+e^x}$$
$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{(1+e^x)e^{-x}} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x}+1}$$
$$= - \int \frac{(e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)} dx = -\log(e^{-x}+1) + C$$

もんだい

問題④

$$\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$$

れいだい

例題①

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$$
$$t = \sqrt{x+2} \text{ とおくと } x = t^2-2$$
$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad dx = 2t dt$$
$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2t dt}{(t^2-1)t}$$
$$= \int \frac{2 dt}{t^2-1} = \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$
$$= \log |t-1| - \log |t+1| + C$$
$$= \log |\sqrt{x+2}-1| - \log |\sqrt{x+2}+1| + C$$

もんだい

問題①

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+3}}$$

れいだい

例題②

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$u = x^2+2 \text{ とすると } \frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx$$
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} + C$$
$$= \sqrt{x^2+2} + C$$

もんだい

問題②

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

1. つぎふていせきぶんもと  
次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.
2. つぎふていせきぶんもと  
次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

れいだい  
例題①

$$\int \sin^3 x \, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$
$$u = \cos x \text{ とおくと } -\sin x \, dx = du$$
$$\int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$
$$= - \int (1 - \cos^2 x) (-\sin x) \, dx$$
$$= - \int (1 - u^2) \, du$$
$$= -u + \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

もんだい  
問題①

$$\int \cos^3 x \, dx$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x \, dx = du$$
$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$$
$$= \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2}u^{-2} + C$$
$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

れいだい  
例題①

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\log |\cos x| + C$$

もんだい  
問題①

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}$$
$$u = \sin x \text{ とおくと } \cos x \, dx = du$$
$$\int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 - u^2}$$
$$= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du$$
$$= \frac{1}{2} \left( \log |1 + \cos x| - \log |1 - \cos x| \right) + C$$
$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

1. 次の関数を微分せよ。Differentiate the following function.

3. 次の等式を証明せよ。Prove the following equation.

れいだい

例題

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

もんだい

問題

$$y = \frac{1}{\tan x}$$

れいだい

例題

$$\frac{1}{\tan^2 x} + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\tan^2 x} + 1 = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{Q.E.D.}$$

もんだい

問題

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

4. 次の不定積分を求めよ。Find the following indefinite integral.

れいだい

例題①

$$\int \frac{dx}{\tan x}$$
$$t = \sin x \text{ とおくとき, } \frac{dt}{dx} = \cos x, \cos x \, dx = dt$$
$$\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{t} dt$$
$$= \log |t| + C = \log |\sin x| + C$$

もんだい

問題①

$$\int \tan x \, dx$$

れいだい

例題②

$$\int x \sin x^2 \, dx$$
$$t = x^2 \text{ とおくとき, } \frac{dt}{dx} = 2x, x \, dx = \frac{1}{2} dt$$
$$\int x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt$$
$$= -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

もんだい

問題②

$$\int x \cos x^2 \, dx$$

れいだい

例題

$$\int \frac{dx}{\tan^3 x}$$
$$\int \frac{dx}{\tan^3 x} = \int \frac{1}{\tan x} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx$$
$$= \int \left( \frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\tan x} \right) dx$$
$$= \int \left\{ -\left( -\frac{1}{\tan x} \right) \left( -\frac{1}{\tan x} \right)' - \frac{1}{\tan x} \right\} dx$$
$$= -\frac{1}{2 \tan^2 x} - \log |\sin x| + C$$

もんだい

問題

$$\int \tan^3 x \, dx$$

1.  $\tan \frac{x}{2} = t$  のとき、次のことを示せ。  
つぎしめ  
Show the following when  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

れいだい  
例題

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  を示せ。

$$\sin x = \sin \left( 2 \times \frac{x}{2} \right)$$
$$= 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \times \cos^2 \frac{x}{2}$$
$$= 2 \tan \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

もんだい  
問題①

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  を示せ。

もんだい  
問題②

$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$  を示せ。

2.  $\tan \frac{x}{2} = t$  のとき、次の式を  $t$  で表せ。  
つぎしきあらわ  
Express the following equation in t when  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

れいだい  
例題

$\frac{1}{1+\sin x}$

$$= \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}$$
$$= \frac{1+t^2}{1+2t+t^2} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$$

もんだい  
問題

$\frac{1}{1+\cos x}$

3. 次の不定積分を求めよ。  
つぎふていせきぶんもと  
Find the following indefinite integral.

れいだい  
例題①

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$
$$= \int \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t}$$
$$= \log |t| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

もんだい  
問題①

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

れいだい  
例題②

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$
$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと, } dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$
$$= \int \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$= \int \frac{2}{(1+t)^2} dt$$
$$= -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + C$$

もんだい  
問題②

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$



1.  $\tan \frac{x}{2} = t$  のとき、次のことを示せ。  
つぎしめ

Show the following when  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

れいだい

例題

$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$  をしめ。

$1 + \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$  より

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + t^2}$

$\cos x = \cos \left( 2 \times \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

$= \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

もんだい

問題①

$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$  をしめ。

もんだい

問題②

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}$  をしめ。

2.  $\tan \frac{x}{2} = t$  のとき、次の式を  $t$  で表せ。  
つぎしきあらわ

Express the following equation in t when  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

れいだい

例題

$\frac{1}{1 - \cos x}$

$= \frac{1}{1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{2 t^2}$

もんだい

問題

$\frac{1}{1 - \sin x}$

3. 次の不定積分を求めよ。  
つぎふていせきぶんもと

Find the following indefinite integral.

れいだい

例題①

$\int \frac{dx}{\cos x}$

$= \int \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \times \frac{2}{1 + t^2} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt$

$= \int \left( \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt$

$= \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + \log \left| 1 - \tan \frac{x}{2} \right| + C$

もんだい

問題①

$\int \frac{dx}{\sin x}$

れいだい

例題②

$\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

$\tan \frac{x}{2} = t$  とおくと、 $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$

$\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

$= \int \frac{1 + t^2}{2 t^2} \times \frac{2}{1 + t^2} dt$

$= \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + C$

もんだい

問題②

$\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

1.  $\tan \frac{x}{2} = t$  のとき、次のことを示せ。  
Show the following when  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

例題

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\sin x = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right)$$
$$= 2 \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \times \cos^2 \frac{x}{2}$$
$$= 2 \tan \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

問題①

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

問題②

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

2. 次の式を  $x$  で微分し、 $t$  を使った式で表せ。  
Differentiate the following equation with respect to  $x$  and express it using  $t$ .

例題

$$t = \tan x$$
$$\frac{dt}{dx} = \left(\tan x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 x}} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

問題

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

3. 次の式を部分分数に分解せよ。  
Decompose the following expression into partial fractions.

問題

$$\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$
$$\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{(a+b)t^2 + ct + a}{t(1+t^2)}$$

係数を比較し、 $a=2$  ,  $b=-1$  ,  $c=0$

$$\frac{t^2 + 2}{t(1+t^2)} = \frac{2}{t} - \frac{t}{1+t^2}$$

問題

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

4.  $t = \tan \frac{x}{2}$  とおき、次の不定積分を求めよ。  
Find the following indefinite integral with  $t=\tan \frac{x}{2}$ .

例題

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$
$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$
$$= \int \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt$$
$$= \log |t| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

問題

$$\int \frac{1}{\tan x} dx$$