数学Ⅲ　道のり ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次の点 P が通過する道のり s を求めよ。

例題①　x 軸上を t 秒後に速度 $v(t)=4-2t$ で移動する点 P の 0 秒から 4 秒までの道のり

$$s=\int_0^4 \left|4-2t\right| dt$$

$$=\int_0^2 (4-2t)\,dt+\int_2^4 (-4+2t)\,dt$$

$$=\Big[4t-t^2\Big]_0^2+\Big[-4t+t^2\Big]_2^4=8$$

問題①　x 軸上を t 秒後に速度 $v(t)=4-4t$ で移動する点 P の 0 秒から 2 秒までの道のり

例題②　$x=3t^2+1$　,　$y=t^3$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{5})$

$$\frac{dx}{dt}=6t\,,\qquad \frac{dy}{dt}=3t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(6t)^2+(3t^2)^2=9t^4+36t^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{9t^4+36t^2}=3t\sqrt{t^2+4}$$

$$s=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{5}}3t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$$=\Big[(t^2+4)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\sqrt{5}}=19$$

問題②　$x=3t^2$　,　$y=2t^3+1$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$

2. 次の曲線の長さ L を求めよ。

例題①　$x=t-\sin x\,,\ \ y=1-\cos t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos x\,,\qquad \frac{dy}{dt}=\sin x$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos x)^2+(\sin x)^2$$

$$=2(1-\cos x)=4\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ では　$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$　であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=2\sin\frac{t}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\Big[-4\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=8$$

問題①　$x=2\cos t\,,\ y=2\sin t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$

例題②　$y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\log x$　$(1\leqq x\leqq 2)$

$$y'=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$$

$$1+(y')^2=1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$=\Big[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\log x\Big]_1^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

問題②　$y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$　$(0\leqq x\leqq 1)$

数学Ⅲ　道のり ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の曲線の長さ L を求めよ。

例題　$x = \cos^3 t$,　$y = \sin^3 t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t\,,\quad \frac{dx}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$= 9\cos^2 t \sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$$

$$= 9\cos^2 t \sin^2 t$$

$$= 9\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sin 2t\right)^2$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin 2t \geqq 0$　であるから

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin 2t = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right)\right\} = \frac{3}{2}$$

問題　$x = \cos^2 t$,　$y = \sin^2 t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

2. 次の曲線の長さ L を求めよ。

例題　$y = x\sqrt{x}$　$\left(0 \leqq x \leqq 1\right)$

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{9}{4}x = \frac{9x+4}{4}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\ dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{9x+4}{4}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{9x+4}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}\left(9x+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27}\left[\left(9x+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

問題　$y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$　$\left(1 \leqq x \leqq 3\right)$

数学Ⅲ　道のり ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次の点 P が通過する道のり s を求めよ。

例題　x 軸上を t 秒後に速度 $v(t) = 8 - 4t$ で移動する点 P の 0 秒から 4 秒までの道のり

$$s = \int_0^4 \left| 8 - 4t \right| dt$$

$$= \int_0^2 (8 - 4t)\, dt + \int_2^4 (-8 + 4t)\, dt$$

$$= \Big[8t - 2t^2 \Big]_0^2 + \Big[-8t + 2t^2 \Big]_2^4 = 16$$

問題　x 軸上を t 秒後に速度 $v(t) = 6 - 2t$ で移動する点 P の 0 秒から 6 秒までの道のり

2. t 秒の位置が与えられる点の道のり s を求めよ。

例題　$x = e^t \cos t,\ \ y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) \qquad \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= \{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2 = 2e^{2t}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2}\, e^t$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^t\, dt$$

$$= \Big[\sqrt{2}\, e^t \Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\, e^{2\pi} - \sqrt{2}$$

問題　$x = e^{-t} \cos t,\ \ y = e^{-t} \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$

3. 次の曲線の長さ L を求めよ。

例題①　$x = 3t^2 + 1,\ \ y = 2t^3 + 2 \quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \qquad \frac{dy}{dt} = 6t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (6t)^2 + (6t^2)^2 = 36t^2 + 36t^4$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{36t^2 + 36t^4} = 6t\sqrt{t^2 + 1}$$

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2 + 1}\, dt$$

$$= \Big[2(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^{\sqrt{3}} = 14$$

問題①　$x = 3t^2,\ \ y = t^3 - 3t \quad (0 \leqq t \leqq 2)$

例題②　$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$x = \sin\theta$ とおくと

$dx = \cos\theta\, d\theta$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

問題②　$y = \sqrt{4 - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$