

1. 次の立体の体積 V を定積分を用いて求めよ。
Find the volume V of the following solid using definite integral.

例題 底面が一辺 8 の正方形で、高さが 6 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを x 軸とし、頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を $S(x)$ とし、底面積を S とする。

$S = 8 \times 8 = 64$

断面と底面は相似であるから $S(x) : S = x^2 : 6^2$

$6^2 \times S(x) = x^2 \times S$

$S(x) = \frac{x^2}{6^2} S = \frac{64}{36} x^2 = \frac{16}{9} x^2$

$V = \int_0^6 S(x) \, dx$

$= \int_0^6 \frac{16}{9} x^2 \, dx = \frac{16}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^6$

$= \frac{16}{9} \left(\frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 128$

問題 底面が一辺 6 の正方形で、高さが 8 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを x 軸とし、頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を $S(x)$ とし、底面積を S とする。

2. 次の式を $\cos 2x$ を用いて表せ。
Express the following expression using $\cos 2x$.

例題 $\sin^2 x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

よって $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

問題 $\cos^2 x$

3. 次の曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。
Find the volume V of the body of revolution created by rotating the following curve about the x -axis.

例題 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi y^2 \, dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 2x \, dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} \right]_0^\pi \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{8} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

問題 $y = \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

1. 次の立体の体積 V を定積分を用いて求めよ。

Find the volume V of the following solid using definite integrals.

例題 底面が半径 3 の円で、高さが 4 の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを x 軸とし、頂点を原点とする。

座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を $S(x)$ とし、底面積を S とする。

$$S = \pi \times 3^2 = 9 \pi$$

断面と底面は相似であるから $S(x) : S = x^2 : 4^2$

$$S(x) = x^2 \times S$$

$$S(x) = \frac{x^2}{4^2} S = \frac{9}{16} x^2 \pi$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 S(x) dx \\ &= \int_0^4 \frac{9}{16} x^2 \pi dx = \frac{9 \pi}{16} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\ &= \frac{9 \pi}{16} \left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 12 \pi \end{aligned}$$

問題 底面が半径 2 の円で、高さが 6 の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを x 軸とし、頂点を原点とする。

座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を $S(x)$ とし、底面積を S とする。

2. 次の曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

Find the volume V of the body of revolution created by rotating the following curve about the x -axis.

例題① $y = \sqrt{2x}$ ($0 \leq x \leq 2$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (\sqrt{2x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 2x dx = \pi \left[x^2 \right]_0^2 \\ &= \pi (2^2 - 0^2) = 4\pi \end{aligned}$$

問題① $y = \sqrt{3x}$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

例題② $y = \sqrt{4 - x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

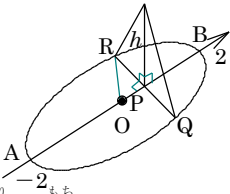
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (\sqrt{4 - x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left\{ \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right\} = \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

問題② $y = \sqrt{9 - x^2}$ ($-3 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

1. 次の立体の体積 V を求めよ。 Find the volume V of the next solid.

2. 次の回転体の体積 V を求めよ。 Find the volume V of the following rotating body.

例題 半径 2 の円 O がある。直径 AB 上の点 P を通り、 AB に垂直な弦 QR を底辺とする正三角形を円 O の面に対して垂直に作る。
 P が A から B まで動くとき、この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。



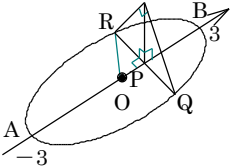
円の中心を原点に、 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とする。
直角三角形 OPR に三平方の定理を用いると

$PR = \sqrt{2^2 - x^2}$
正三角形の高さ h は $h = \sqrt{3}$ $PR = \sqrt{3} \sqrt{2^2 - x^2}$
正三角形の面積 $S(x)$ は

$S(x) = \frac{1}{2} \times 2PR \times h = \sqrt{3} (2^2 - x^2)$

$V = \int_{-2}^2 S(x) dx = \sqrt{3} \int_{-2}^2 (2^2 - x^2) dx$
 $= 2\sqrt{3} \int_0^2 (2^2 - x^2) dx$
 $= 2\sqrt{3} \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3} \sqrt{3}$

問題 半径 3 の円がある。 O の直径 AB 上の点 P を通り、 AB に垂直な弦 QR を底辺とする高さ PR の直角二等辺三角形を円 O の面に対して垂直に作る。
 P が A から B まで動くとき、この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。



円の中心を原点に、 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とする。

例題 直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{2x}$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。
このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

交点の x 座標を求めると $x = 0, 2$
 $x = \sqrt{2x}$ よって $x^2 = 2x$
 $x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$

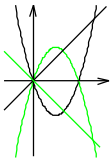
$0 < x < 2$ のとき、 $\sqrt{2x} > x$ であるから求める体積 V は

$V = \int_0^2 \pi \{ (\sqrt{2x})^2 - x^2 \} dx$
 $= \pi \int_0^2 (2x - x^2) dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \pi$

問題 ① 直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{4x}$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。
このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

問題 ② 直線 $y = 3x$ と曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。
このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

例題 $y = x$ と $y = x^2 - 3x$ で囲まれた部分を x 軸の
まわ　　かいてん　たいせき　もと
りで 1 回転した体積 V を求めよ。



$y = x^2 - 3x$ と x 軸の交点の x 座標は

$$x^2 - 3x = x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$$

$y = x$ と $y = x^2 - 3x$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 3x = x, \quad x^2 - 4x = x(x - 4) = 0 \quad \text{より}$$

$$x = 0, 4$$

$y = -x$ と $y = x^2 - 3x$ の交点の x 座標は

$$x^2 - 3x = -x, \quad x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \quad \text{より}$$

$$x = 0, 2$$

(1) $0 \leq x \leq 2$ のとき

図形は x 軸を跨ぎ、 $y = x^2 - 3x$ が外形になる。

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^2 (x^2 - 3x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

(2) $2 \leq x \leq 3$ のとき

図形は x 軸を跨ぎ、 $y = x$ が外形になる。

$$V_2 = \pi \int_2^3 (x)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{19}{3} \pi$$

(3) $3 \leq x \leq 4$ のとき

図形は x 軸を跨がない。

そとがわ　たいせき　うちがわ　たいせき　ひ
外側の体積から、内側の体積を引く。

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_3^4 (x)^2 dx - \pi \int_3^4 (x^2 - 3x)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^4 - \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_3^4 \\ &= \frac{37}{3} \pi - \frac{47}{10} \pi \end{aligned}$$

(4) $0 \leq x \leq 4$ のとき

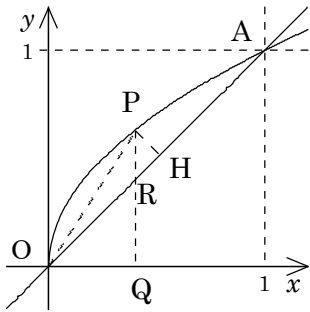
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= \frac{32}{5} \pi + \frac{19}{3} \pi + \frac{37}{3} \pi - \frac{47}{10} \pi \\ &= \frac{611}{30} \pi \end{aligned}$$

問題 $y = x$ と $y = x^2 - 2x$ で囲まれた部分を x 軸の
まわ　　かいてん　たいせき　もと
りで 1 回転した体積 V を求めよ。

例題 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この曲線と直線で囲まれる部分を $y = x$ の周りで 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ。

曲線上の点 $P(x, \sqrt{x})$ から $y = x$ と x 軸に、それぞれ垂線 PH , 垂線 PQ を引き、 $PH = h$, $OH = t$ とする。

($0 \leq t \leq \sqrt{2}$)



点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であるから

$$h = \frac{|x - \sqrt{x}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}$$

垂線 PQ と $y = x$ との交点を R とすると

$OH = OR + RH = OR + PH$ であるから

$$t = \sqrt{2} \, x + \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right)$$

したがって

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} PH^2 \, dt$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(x - 2x\sqrt{x} + x^2 \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

問題 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この曲線と直線で囲まれる部分を $y = x$ の周りで 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ。

曲線上の点 $P(x, x^2)$ から $y = x$ と x 軸に、それぞれ垂線 PH , 垂線 PQ を引き、 $PH = h$, $OH = t$ とする。

($0 \leq t \leq \sqrt{2}$)

