

1. 次の立体の体積  $V$  を定積分を用いて求めよ。  
Find the volume  $V$  of the following solid using definite integral.

例題 底面が一辺 8 の正方形で、高さが 6 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを  $x$  軸とし、頂点を原点とする。  
座標が  $x$  である点を通り  $x$  軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を  $S(x)$  とし、底面積を  $S$  とする。

$$S = 8 \times 8 = 64$$

断面と底面は相似であるから  $S(x) : S = x^2 : 6^2$

$$6^2 \times S(x) = x^2 \times S$$

$$S(x) = \frac{x^2}{6^2} S = \frac{64 x^2}{36} = \frac{16 x^2}{9}$$

$$V = \int_0^6 S(x) dx$$

$$= \int_0^6 \frac{16 x^2}{9} dx = \frac{16}{9} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^6$$

$$= \frac{16}{9} \left( \frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 128$$

問題 底面が一辺 6 の正方形で、高さが 8 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを  $x$  軸とし、頂点を原点とする。  
座標が  $x$  である点を通り  $x$  軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を  $S(x)$  とし、底面積を  $S$  とする。

2. 次の式を  $\cos 2x$  を用いて表せ。  
Express the following expression using  $\cos 2x$ .

例題  $\sin^2 x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

問題  $\cos^2 x$

3. 次の曲線を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。  
Find the volume  $V$  of the body of revolution created by rotating the following curve about the  $x$ -axis.

例題  $y = \sin 2x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 2x dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} \right]_0^\pi \\ &= \pi \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left( \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{8} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

問題  $y = \cos 2x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

1. 次の立体の体積  $V$  を定積分を用いて求めよ。

Find the volume  $V$  of the following solid using definite integrals.

例題 底面が半径3の円で、高さが4の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを  $x$  軸とし、頂点を原点とする。

座標が  $x$  である点を通り  $x$  軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を  $S(x)$  とし、底面積を  $S$  とする。

$$S = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

断面と底面は相似であるから  $S(x) : S = x^2 : 4^2$

$$8^2 \times S(x) = x^2 \times S$$

$$S(x) = \frac{x^2}{4^2} S = \frac{9x^2\pi}{16}$$

$$V = \int_0^4 S(x) dx$$

$$= \int_0^4 \frac{9x^2\pi}{16} dx = \frac{9\pi}{16} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \frac{9\pi}{16} \left( \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 12\pi$$

問題 底面が半径2の円で、高さが6の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし、これを  $x$  軸とし、頂点を原点とする。

座標が  $x$  である点を通り  $x$  軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を  $S(x)$  とし、底面積を  $S$  とする。

2. 次の曲線を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

Find the volume  $V$  of the body of revolution created by rotating the following curve about the  $x$ -axis.

例題①  $y = \sqrt{2x}$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (\sqrt{2x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 2x dx = \pi \left[ x^2 \right]_0^2$$

$$= \pi (2^2 - 0^2) = 4\pi$$

問題①  $y = \sqrt{3x}$  ( $0 \leq x \leq 3$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

例題②  $y = \sqrt{4-x^2}$  ( $-2 \leq x \leq 2$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

$$V = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (\sqrt{4-x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \pi \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \pi \left\{ \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -8 + \frac{8}{3} \right) \right\} = \frac{32}{3}\pi$$

問題②  $y = \sqrt{9-x^2}$  ( $-3 \leq x \leq 3$ ) を  $x$  軸のまわりに回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

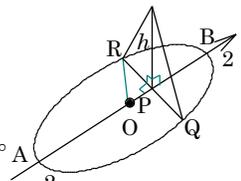
1. 次の立体の体積  $V$  を求めよ。 Find the volume  $V$  of the next solid.

2. 次の回転体の体積  $V$  を求めよ。 Find the volume  $V$  of the following rotating body.

例題 半径2の円  $O$  がある。直径  $AB$  上の点  $P$  を通り、 $AB$  に垂直な弦  $QR$  を底辺とする正三角形を円  $O$  の面に対して垂直に作る。

$P$  が  $A$  から  $B$  まで動くとき、この三角形が通過してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

円  $O$  の中心を原点に、 $AB$  を  $x$  軸にとる。点  $P$  の座標を  $x$  とする。



直角三角形  $OPR$  に三平方の定理を用いると

$$PR = \sqrt{2^2 - x^2}$$

正三角形の高さ  $h$  は  $h = \sqrt{3} PR = \sqrt{3} \sqrt{2^2 - x^2}$

正三角形の面積  $S(x)$  は

$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2PR \times h = \sqrt{3} (2^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-2}^2 S(x) dx = \sqrt{3} \int_{-2}^2 (2^2 - x^2) dx$$

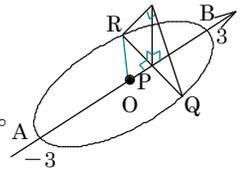
$$= 2\sqrt{3} \int_0^2 (2^2 - x^2) dx$$

$$= 2\sqrt{3} \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3} \sqrt{3}$$

問題 半径3の円  $O$  がある。直径  $AB$  上の点  $P$  を通り、 $AB$  に垂直な弦  $QR$  を底辺とする高さ  $PR$  の直角二等辺三角形を円  $O$  の面に対して垂直に作る。

$P$  が  $A$  から  $B$  まで動くとき、この三角形が通過してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

円  $O$  の中心を原点に、 $AB$  を  $x$  軸にとる。点  $P$  の座標を  $x$  とする。



例題 直線  $y = x$  と曲線  $y = \sqrt{2x}$  で囲まれた図形を  $x$  軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

交点の  $x$  座標を求めると  $x = 0, 2$

$$x = \sqrt{2x} \quad \text{よって} \quad x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0, \quad x(x-2) = 0$$

$0 < x < 2$  のとき、 $\sqrt{2x} > x$  であるから

求める体積  $V$  は

$$V = \int_0^2 \pi \{ (\sqrt{2x})^2 - x^2 \} dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2x - x^2) dx = \pi \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \pi$$

問題 ① 直線  $y = x$  と曲線  $y = \sqrt{4x}$  で囲まれた図形を  $x$  軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

問題 ② 直線  $y = 3x$  と曲線  $y = 3x^2$  で囲まれた図形を  $x$  軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

数学III 体積(回転体) ① 課題

( )年( )組( )番( )

1. 次の図形を  $x$  軸の周りで 1 回転した体積  $V$  を求めよ。  
Find the volume  $V$  of the following figure rotated once around the  $x$ -axis.

2. 次の図形を  $y$  軸の周りで 1 回転した体積  $V$  を求めよ。  
Find the volume  $V$  of the following figure rotated once around the  $y$ -axis.

例題  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

この楕円と  $x$  軸の交点の座標は  $(-5, 0), (5, 0)$

$y^2 = \frac{4^2}{5^2}(5^2 - x^2)$  であるから回転体の体積  $V$  は

$$V = \pi \int_{-5}^5 y^2 dx$$

$$= \pi \int_{-5}^5 \frac{4^2}{5^2}(5^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \times \frac{4^2}{5^2} \int_0^5 (5^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \times \frac{4^2}{5^2} \left[ 5^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^5$$

$$= 2\pi \times \frac{4^2}{5^2} \left( 5^3 - \frac{5^3}{3} \right)$$

$$= \frac{320}{3} \pi$$

例題  $y = x^2 - 4$  と  $y = 1$  で囲まれた部分

この図形と  $y$  軸の交点の座標は  $(0, -4), (0, 1)$

$x^2 = y + 4$  であるから回転体の体積  $V$  は

$$V = \pi \int_{-4}^1 x^2 dy$$

$$= \pi \int_{-4}^1 (y + 4) dy$$

$$= \pi \left[ \frac{y^2}{2} + 4y \right]_{-4}^1$$

$$= \pi \left\{ \left( \frac{1^2}{2} + 4 \right) - \left( \frac{(-4)^2}{2} - 16 \right) \right\}$$

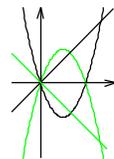
$$= \frac{25}{2} \pi$$

問題  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

問題①  $y = -x^2 + 4$  と  $y = 0$  で囲まれた部分

問題②  $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

例題  $y = x$  と  $y = x^2 - 3x$  で囲まれた部分を  $x$  軸の周りで 1 回転した体積  $V$  を求めよ。



$y = x^2 - 3x$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は

$$x^2 - 3x = x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$$

$y = x$  と  $y = x^2 - 3x$  の交点の  $x$  座標は

$$x^2 - 3x = x, \quad x^2 - 4x = x(x - 4) = 0 \text{ より}$$

$$x = 0, 4$$

$y = -x$  と  $y = x^2 - 3x$  の交点の  $x$  座標は

$$x^2 - 3x = -x, \quad x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \text{ より}$$

$$x = 0, 2$$

(1)  $0 \leq x \leq 2$  のとき

図形は  $x$  軸を跨ぎ、 $y = x^2 - 3x$  が外形になる。

$$V_1 = \pi \int_0^2 (x^2 - 3x)^2 dx$$

$$= \pi \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi$$

(2)  $2 \leq x \leq 3$  のとき

図形は  $x$  軸を跨ぎ、 $y = x$  が外形になる。

$$V_2 = \pi \int_2^3 (x)^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{19}{3} \pi$$

(3)  $3 \leq x \leq 4$  のとき

図形は  $x$  軸を跨がない。

外側の体積から、内側の体積を引く。

$$V_3 = \pi \int_3^4 (x)^2 dx - \pi \int_3^4 (x^2 - 3x)^2 dx$$

$$= \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_3^4 - \pi \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_3^4$$

$$= \frac{37}{3} \pi - \frac{47}{10} \pi$$

(4)  $0 \leq x \leq 4$  のとき

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

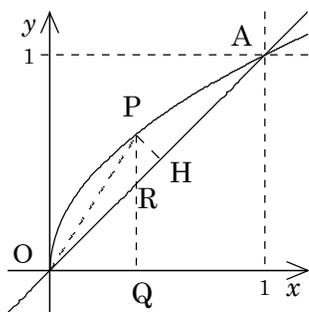
$$= \frac{32}{5} \pi + \frac{19}{3} \pi + \frac{37}{3} \pi - \frac{47}{10} \pi$$

$$= \frac{611}{30} \pi$$

問題  $y = x$  と  $y = x^2 - 2x$  で囲まれた部分を  $x$  軸の周りで 1 回転した体積  $V$  を求めよ。

例題 曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = x$  との原点  $O$  以外の  
 交点を  $A$  とする。この曲線と直線で囲まれる  
 部分を  $y = x$  の周りで 1 回転して得られる立体  
 の体積  $V$  を求めよ。

曲線上の点  $P(x, \sqrt{x})$  から  
 $y = x$  と  $x$  軸に、それぞれ垂線  
 $PH$ , 垂線  $PQ$  を引き,  $PH = h$ ,  
 $OH = t$  とする。



$$(0 \leq t \leq \sqrt{2})$$

点  $(x_0, y_0)$  と直線  $ax + by + c = 0$  との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であるから

$$h = \frac{|x - \sqrt{x}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}$$

垂線  $PQ$  と  $y = x$  との交点を  $R$  とすると

$OH = OR + RH = OR + PH$  であるから

$$t = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right)$$

したがって

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} PH^2 dt$$

$$= \pi \int_0^1 \left( \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (x - 2x\sqrt{x} + x^2) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

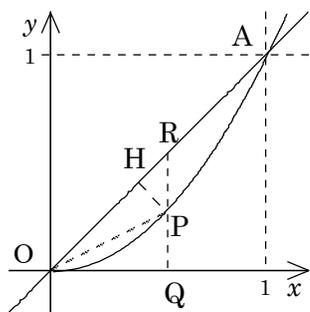
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left( x^2 - \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

問題 曲線  $y = x^2$  と直線  $y = x$  との原点  $O$  以外の  
 交点を  $A$  とする。この曲線と直線で囲まれる  
 部分を  $y = x$  の周りで 1 回転して得られる立体  
 の体積  $V$  を求めよ。

曲線上の点  $P(x, x^2)$  から  
 $y = x$  と  $x$  軸に、それぞれ垂線  
 $PH$ , 垂線  $PQ$  を引き,  $PH = h$ ,  
 $OH = t$  とする。



$$(0 \leq t \leq \sqrt{2})$$

