数学Ⅲ　不定積分 ① 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の[　　]を埋めて，文章を完成せよ。
Fill in the blanks below to complete the sentences.

x で微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の[　　　]関数という。
関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が一つわかれば，$f(x)$ の任意の原始関数は「$F(x)+C$」の形で表せる。
この C を積分定数という。
原始関数 $F(x)+C$ を関数 $f(x)$ の[　　　]積分といい，$\int f(x)\,dx$ で表す。
$f(x)$ の不定積分を求めることを[　　　]するという。
積分することは，微分することの逆の演算である。

2．次の関数を微分し，逆の演算の積分を求めよ。
Differentiate the following function and find the integral of the inverse operation.

例題	問題
① x $(x)' = 1\times x^{1-1} = x^0 = 1$ $\int 1\ dx = x + C$	① $2x$
② x^2 $(x^2)' = 2\ x^{2-1} = 2\ x$ $\int 2\ x\ dx = x^2 + C$	② x^3
③ $\frac{1}{x} = x^{-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -1\times x^{-1-1}$ $= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C$	③ $\frac{1}{x^2}$
④ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ $= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	④ $\sqrt[3]{x}$
⑤ $\log x$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$ $\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert + C$	⑤ $x\log x$

3．次の関数を微分せよ。
Differentiate the following function.

例題① $\cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
問題① $\sin x$
例題② $\frac{\cos x}{\sin x}$ $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$ $= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$
問題② $\frac{\sin x}{\cos x}$
例題③ $\frac{a^x}{\log a}$ $\left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}\times(a^x)' = \frac{1}{\log a}\times(a^x\times\log a)$ $= a^x$
問題③ $\frac{e^x}{\log e} = e^x$

4．次の不定積分を求めよ。
Find the following indefinite integral.

例題	問題
① $\int \sin x\ dx$ $= -\cos x + C$	① $\int \cos x\ dx$
② $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ $= -\frac{\cos x}{\sin x} + C$	② $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$
③ $\int a^x\ dx$ $= \frac{a^x}{\log a} + C$	④ $\int e^x\ dx$

数学Ⅲ　不定積分 ② 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の[　　]を埋めて，文章を完成せよ。

x で微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の[　　　　]関数という。

関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が一つわかれば，$f(x)$ の任意の原始関数は「$F(x)+C$」の形で表せる。

この C を積分定数という。

原始関数 $F(x)+C$ を関数 $f(x)$ の[　　　　]積分といい，

$\int f(x)\,dx$ で表す。

$f(x)$ の不定積分を求めることを[　　　　]するという。

積分することは，微分することの逆の演算である。

2．次の関数を微分し，逆の演算の積分を求めよ。

例題	問題
① x^3 $(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$ $\int 3x^2\,dx=x^3+C$	① x^4
② $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ $\left(\frac{1}{x^3}\right)'=-3\times x^{-3-1}$ $=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$ $\int\left(-\frac{3}{x^4}\right)dx=\frac{1}{x^3}+C$	② $\frac{1}{x^4}$
③ $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$ $=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\int\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x}+C$	③ $\sqrt[4]{x}$
④ $\sin x$ $(\sin x)'=\cos x$ $\int\cos x\,dx=\sin x+C$	④ $\cos x$
⑤ 3^x $(3^x)'=3^x\log 3$ $\int 3^x\log 3\,dx=3^x+C$	⑤ e^x

3．次の不定積分を求めよ。　　※微分で検算する。

例題①　$\int\left(3x^2+\frac{3}{x^4}\right)dx$

$=x^3-\frac{1}{x^3}$

問題①　$\int\left(4x^3-\frac{4}{x^5}\right)dx$

例題②　$\int(3x-1)(x+1)\,dx$

$=\int(3x^2+2x-1)\,dx$

$=x^3+x^2-x+C$

問題②　$\int(3x+2)(2x-2)\,dx$

例題③　$\int(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)\,dx$

$=\int(2x+3\sqrt{x}+1)\,dx$

$=x^2+2x\sqrt{x}+x+C$

問題③　$\int(4\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\,dx$

例題④　$\int\frac{x^2+3x+2}{x}\,dx$

$=\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)dx$

$=\frac{x^2}{2}+3x+2\log|x|+C$

問題④　$\int\frac{4x^2+1}{x}\,dx$

数学Ⅲ　不定積分 ③ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の[　　]を埋めて，文章を完成せよ。

> x で微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の[　　　]関数という。
> 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が一つわかれば，$f(x)$ の任意の原始関数は「$F(x)+C$」の形で表せる。
> この C を積分定数という。
> 原始関数 $F(x)+C$ を関数 $f(x)$ の[　　　]積分といい，$\int f(x)\,dx$ で表す。
> $f(x)$ の不定積分を求めることを[　　　]するという。
> 積分することは，微分することの逆の演算である。

2．次の関数を微分し，逆の演算の積分を求めよ。

例題	問題
① $\frac{x^3}{3}$ $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^{3-1}}{3} = x^2$ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$	① $\frac{x^4}{4}$
② $-\frac{1}{3x^3}$ $\left(-\frac{1}{3x^3}\right)' = \left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)'$ $= \frac{-3x^{-3-1}}{-3} = \frac{1}{x^4}$ $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C$	② $-\frac{1}{2x^2}$
③ $4\sqrt[4]{x}$ $(4\sqrt[4]{x})' = \left(4x^{\frac{1}{4}}\right)'$ $= 4\times\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$ $= x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x} + C$	③ $\sqrt{x}$
④ $\log\lvert x\rvert$ $(\log\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$ $\int \frac{dx}{x} = \log\lvert x\rvert + C$	④ $x\log x - x$

3．次の不定積分を求めよ。　※微分で検算する。

例題① $\int\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$

問題① $\int\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}}\right)dx$

例題② $\int\left(t^2 - \frac{2}{t}\right)^2 dt$

$= \int\left(t^4 - 4t - \frac{4}{t^2}\right)dt$

$= \frac{t^5}{5} - 2t^2 + \frac{4}{t} + C$

問題② $\int\left(2t^3 + \frac{1}{t}\right)^2 dt$

例題③ $\int\left(\frac{2x^2-3x+1}{x}\right)dx$

$= \int\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)dx$

$= x^2 - 3x + \log\lvert x\rvert + C$

問題③ $\int\left(\frac{3x^4-5x^2+x}{x^2}\right)dx$

問題④ $\int\left(\frac{3x^3-2x+1}{x}\right)dx$

数学Ⅲ　不定積分(整式の関数)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の$\boxed{}$を埋めて，文章を完成せよ。

xで微分すると$f(x)$になる関数を$f(x)$の$\boxed{}$関数という。
関数$f(x)$の原始関数$F(x)$が一つわかれば，$f(x)$の任意の原始関数は「$F(x)+C$」の形で表せる。
このCを積分定数という。
原始関数$F(x)+C$を関数$f(x)$の$\boxed{}$積分といい，
$\int f(x)\,dx$ で表す。
$f(x)$の不定積分を求めることを$\boxed{}$するという。
積分することは，微分することの逆の演算である。

2．次の関数を微分せよ。　　※$(x^p)'=p\,x^{p-1}$

例題	問題
① $y=2x+1$ $y'=2(x)'+(1)'$ $=2\times x^{1-1}+0$ $=2$	① $y=2x-4$
② $y=\frac{1}{2}x^2$ $y'=\frac{1}{2}(x^2)'$ $=\frac{1}{2}\times 2x^{2-1}$ $=x$	② $y=3x^2$
③ $y=\frac{1}{3}x^3$ $y'=\frac{1}{3}(x^3)'$ $=\frac{1}{3}\times 3x^{3-1}$ $=x^2$	③ $y=4x^3$
④ $y=x^3+3x$ $y'=(x^3)'+3(x)'$ $=3x^2+3$	④ $y=x^2-2x$
⑤ $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'$ $=-1\times x^{-1-1}$ $=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$	⑤ $\frac{1}{x^2}$
⑥ $y=2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}}$ $y'=(2\sqrt{x})'$ $=2\times\frac{1}{2}\times x^{\frac{1}{2}-1}$ $=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$	⑥ $3\sqrt[3]{x}$　　※無理関数

3．$\log x$を微分せよ。

$$(\log x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(\boxed{1+\frac{\quad}{\quad}}\right)$$

$\frac{h}{x}=t$とおくと　$h\to 0$のとき，$t\to\boxed{}$

$$(\log x)'=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{\quad}{\quad}}\log\left(\boxed{1+\quad}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{\quad}{\quad}}\log\left(\boxed{1+\quad}\right)^{\frac{1}{h}}=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}\log e=\boxed{\frac{\quad}{\quad}}$$

4．次の不定積分を求めよ。

※ $p\neq -1$のとき　$\int x^p\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$

例題	問題
① $\int 2\,dx$ $=2x+C$	① $\int 3\,dx$
② $\int 2x\,dx$ $=2\times\frac{x^{1+1}}{1+1}+C$ $=x^2+C$	② $\int 6x\,dx$
③ $\int 3x^2\,dx$ $=3\times\frac{x^{2+1}}{2+1}+C$ $=x^3+C$	③ $\int \frac{1}{2}x^2\,dx$
④ $\int(3x^2+3)\,dx$ $=3\times\frac{x^3}{3}+3\times x+C$ $=x^3+3x+C$	④ $\int(6x^2+2x)\,dx$
⑤ $\int\frac{1}{x^2}\,dx$ $=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C$ $=-\frac{1}{x}+C$	⑤ $\int\frac{2}{x^3}\,dx$
⑥ $\int\frac{1}{x}\,dx$ $=\log\lvert x\rvert+C$	⑥ $\int\frac{2}{x}\,dx$

数学Ⅲ　不定積分(三角関数・指数関数)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の文章の $\square$ を埋めて，三角関数を微分せよ。

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}=0\ ,\quad \lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$\sin(x+h)-\sin x$$

$$=\boxed{\sin\ \square\ \cos\ \square\quad \cos\ \square\ \sin\ \square}-\sin x$$

$$=\left(\square\right)\sin x+\square\ \cos x$$

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{\square}{h}\sin x+\frac{\square}{h}\cos x\right)$$

$$=\square\times\sin x+\square\times\cos x=\square$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\ \cos\frac{\pi}{2}+\boxed{\cos\ \square\ \sin\ \square}$$

$$=\sin x\times\square+\cos x\times\square=\square$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\ \cos\frac{\pi}{2}-\boxed{\sin\ \square\ \sin\ \square}$$

$$=\cos x\times\square+\sin x\times\square=\square$$

$$(\cos x)'=\left\{\boxed{\square\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}'$$

$$=\boxed{\square\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'$$

$$=\square$$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\sin x)'\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\square}{\cos^2 x}$$

$$=\square$$

2．$\dfrac{1}{\tan x}$ を微分せよ。

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\left(\frac{\square}{\square}\right)'$$

$$=\frac{\square}{\square}$$

$$=\square$$

3．$\log_a x$ を微分せよ。　※ a は 1 でない正の定数

$$(\log_a x)'=\lim_{h\to0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{\square}{\square}\right)$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと　$h\to0$ のとき，$t\to\square$

$$(\log_a x)'=\lim_{t\to0}\frac{\square}{\square}\log_a\left(1+\square\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\square}{\square}\log_a\left(1+\square\right)^{\frac{1}{h}}=\frac{\square}{\square}\log_a\square$$

底の変換公式より　$\log_a e=\dfrac{\log_e \square}{\log_e \square}=\dfrac{1}{\log\ \square}$

$$(\log_a x)'=\frac{\square}{\square}$$

4．$y=a^x$ を微分せよ。　※ a は 1 でない正の定数

$y=a^x$ の両辺を a を底とする対数をとると

$$\log_a y=\log_a\square=\square\log_a a=x$$

$x=\log_a y$ を微分すると　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\square}{\square\log a}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{\square}{\square}}=a^x\square$$

5．次の不定積分を求めよ。　※微分と積分は逆の関係

例題	問題
① $\int\cos x\,dx$ $=\sin x+C$	① $\int\sin x\,dx$
② $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$ $=\tan x+C$	② $\int\frac{dx}{\sin^2 x}$
③ $\int 2^x\log 2\,dx$ $=2^x+C$	③ $\int 3^x\log 3\,dx$
④ $\int 2^x\,dx$ $=\frac{2^x}{\log 2}+C$	④ $\int 3^x\,dx$