

1. 地上  $x_0$  m から、初速度  $v_0$  m/s で鉛直方向へボールを投げ上げる。重力加速度  $g$  を用いて、 $t$  秒後のボールの  
高さは  $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$  で与えられる。  
ボールの速度  $v$  m/s, 加速度  $\alpha$  m/s<sup>2</sup> を求めよ。

例題 2 秒後の速度と加速度を求めよ。

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0 \right) = v_0 - g t$$
$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} (v_0 - g t) = -g$$

2 秒後の速度は  $v(2) = v_0 - 2g$  (m/s)

2 秒後の加速度は  $\alpha(2) = -g$  (m/s<sup>2</sup>)

問題 4 秒後の速度と加速度を求めよ。

2. 時刻  $t$  における点 P の座標  $(x, y)$  が次の式で与えられているとき、 $t = 2$  におけるの P の速さ, 加速度の  
大きさを求めよ。  
時刻  $t$  における P の速度を  $\vec{v}$ , 加速度を  $\vec{\alpha}$  とする。

例題  $x = 3t + 1, y = t^2 - 1$

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = 3, y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 2t$$

よって、 $t = 2$  のとき、 $\vec{v} = (2, 4)$

P の速さ  $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\vec{\alpha} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = 0, y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

よって、 $t = 2$  のとき、 $\vec{\alpha} = (0, 2)$

P の加速度  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

問題  $x = 4t + 1, y = t^2 - t$

3. 時刻  $t$  における点 P の座標  $(x, y)$  が次の式で与えられているとき、 $t = 2$  におけるの P の速さ, 加速度の  
大きさを求めよ。

例題  $x = 3 \cos \pi t, y = 3 \sin \pi t$

時刻  $t$  における P の速度を  $\vec{v}$ , 加速度を  $\vec{\alpha}$  とする。

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = -3 \pi \sin \pi t$$

$$y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 3 \pi \cos \pi t$$

よって、 $t = 2$  のとき、 $\vec{v} = (0, 3\pi)$

P の速さ  $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (3\pi)^2} = 3\pi$

$$\vec{\alpha} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -3 \pi^2 \cos \pi t$$

$$y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -3 \pi^2 \sin \pi t$$

よって、 $t = 2$  のとき、 $\vec{\alpha} = (-3\pi^2, 0)$

P の加速度  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-3\pi^2)^2 + 0^2} = 3\pi^2$

問題  $x = 4 \cos \pi t, y = 4 \sin \pi t$

1. 地上  $x_0$  m から、初速度  $v_0$  m/s で鉛直方向へボールを投げ上げる。重力加速度  $g$  を用いて、 $t$  秒後のボールの  
高さは  $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$  で与えられる。  
ボールの速度  $v$  m/s, 加速度  $a$  m/s<sup>2</sup> を求めよ。

例題 4 秒後の速度と加速度を求めよ。

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left( v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0 \right) = v_0 - g t$$
$$a(t) = \frac{d}{dt} \left( v_0 - g t \right) = -g$$

4 秒後の速度は  $v(4) = v_0 - 4g$  (m/s)

4 秒後の加速度は  $a(4) = -g$  (m/s<sup>2</sup>)

問題 6 秒後の速度と加速度を求めよ。

2. 時刻  $t$  における点 P の座標  $(x, y)$  が次の式で与えられているとき、 $t = 1$  におけるの P の速さ, 加速度の  
大きさを求めよ。  
時刻  $t$  における P の速度を  $\vec{v}$ , 加速度を  $\vec{a}$  とする。

例題  $x = t^2 + 1, y = -t^2 - t + 1$

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = 2t, y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = -2t - 1$$

よって、 $t = 1$  のとき、 $\vec{v} = (2, -3)$

P の速さ  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$\vec{a} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = 2, y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -2$$

よって、 $t = 1$  のとき、 $\vec{a} = (2, -2)$

P の加速度  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

問題  $x = t^2 - 2t, y = t^2 + 1$

3. 時刻  $t$  における点 P の座標  $(x, y)$  が次の式で与えられているとき、 $t = \frac{1}{2}$  におけるの P の速さ, 加速度の  
大きさを求めよ。

例題  $x = 4 \cos \pi t, y = \sin 2 \pi t$

時刻  $t$  における P の速度を  $\vec{v}$ , 加速度を  $\vec{a}$  とする。

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = -4 \pi \sin \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 2 \pi \cos 2 \pi t$$

よって、 $t = \frac{1}{2}$  のとき、 $\vec{v} = (-4 \pi, -2 \pi)$

P の速さ  $|\vec{v}| = \sqrt{(-4 \pi)^2 + (-2 \pi)^2} = 2 \sqrt{5} \pi$

$$\vec{a} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -4 \pi^2 \cos \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -4 \pi^2 \sin 2 \pi t$$

よって、 $t = \frac{1}{2}$  のとき、 $\vec{a} = (0, -4 \pi^2)$

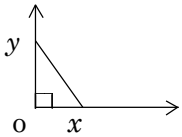
P の加速度  $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-4 \pi^2)^2} = 4 \pi^2$

問題  $x = \pi t - \sin \pi t, y = 1 - \cos \pi t$

1. 地面に垂直な壁に棒を立てかけ、棒の下端を水平方向に引っ張った。棒の上端の速度を求めよ。
2. 座標底面上を運動する点 P の時刻  $t$  における速さ  $v$  の最大値と最小値を求めよ。

例題 地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ、下端を速さ 0.2 m/s で水平方向に引っ張った。棒の下端が壁から 3 m のときの上端の速度を求めよ。

棒の上端を  $(0, y)$  ,  
棒の下端を  $(x, 0)$  とする。  
三平方の定理より



$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x = 3$  のとき、 $3^2 + y^2 = 5^2$  より  $y = 4$

$x, y$  は時刻  $t$  の関数であるから、 $\textcircled{1}$  を  $t$  で微分して

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad ,$$

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = 0.2, x = 3, y = 4$  を代入して

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{3}{4} \times 0.2 = -0.15 \quad (\text{m/s})$$

問題 地面に垂直な壁に長さ 10 m の棒を立てかけ、下端を速さ 0.3 m/s で水平方向に引っ張った。棒の下端が壁から 6 m のときの上端の速度を求めよ。

例題  $x = 4 \cos t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\frac{dx}{dt} = -4 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (-4 \sin t)^2 + (2 \cos 2t)^2 \\ &= 16 \sin^2 t + 4(2 \cos^2 t - 1)^2 \\ &= 16(1 - \cos^2 t) + 16 \cos^4 t - 16 \cos^2 t + 4 \\ &= 16 \cos^4 t - 32 \cos^2 t + 20 = 16(\cos^2 t - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$  の最大値と最小値は

$0 \leq \cos^2 t \leq 1$  であるから

最大値 20,  $\cos^2 t = 0, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値 4,  $\cos^2 t = 1, t = 0, \pi, 2\pi$

$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$  の最大値と最小値は

最大値  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値  $\sqrt{4} = 2, t = 0, \pi, 2\pi$

問題  $x = 4 \sin t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$