

1. 地上 x_0 m から、初速度 v_0 m/s で鉛直 方向へボールを
投げ上げる。重力加速度 g を用いると、 t 秒後のボール
の高さは $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$ となる。
ボールの速度 v m/s , 加速度 α m/s² を求めよ。
A ball is thrown vertically from a distance of x_0 m above the ground with
an initial velocity of v_0 m/s. Using the acceleration of gravity g , the height
of the ball after t seconds is $x = v_0 t - 0.5g t^2 + x_0$.
Find the ball's position x m, velocity v m/s and acceleration α m/s².

例題 2 秒後の 位置, 速度, 加速度を求めよ。
2 sec later position velocity acceleration

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$$
$$v(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0 \right) = v_0 - g t$$
$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 - g t \right) = - g$$

2秒後の位置は

$x(2) = 2 v_0 - 2 g + x_0$ (m)

2秒後の速度は

$v(2) = v_0 - 2 g$ (m/s)

2秒後の加速度は

$\alpha(2) = - g$ (m/s²)

問題 ① 4 秒後の位置, 速度, 加速度を求めよ。
4 sec later position velocity acceleration

問題 ② 地上 0 m から初速度 30 m/s で打ち上げたとき,
6 秒後の位置, 速度, 加速度を求めよ。
6 sec later position velocity acceleration
 $g = 10$ m/s² とする。

2. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられ
ているとき、 $t = 2$ におけるの P の速さ, 加速度の
大きさを求めよ。
The coordinates (x, y) of point P at time t are given by the following equation.
Find the magnitude of the velocity and acceleration of P at $t = 2$.

例題 $x = 3 \cos \pi t$, $y = 3 \sin \pi t$

時刻 t における P の速度を \vec{v} , 加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = -3 \pi \sin \pi t$$

$$y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 3 \pi \cos \pi t$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{v} = (0, 3\pi)$

$$\text{P の速さ } |\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (3\pi)^2} = 3\pi$$

$$\vec{\alpha} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -3 \pi^2 \cos \pi t$$

$$y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -3 \pi^2 \sin \pi t$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{\alpha} = (-3 \pi^2, 0)$

$$\text{P の加速度 } |\vec{\alpha}| = \sqrt{(-3 \pi^2)^2 + 0^2} = 3 \pi^2$$

問題 $x = 4 \cos \pi t$, $y = 4 \sin \pi t$

1. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = 1$ における P の速さ、加速度の大きさを求めよ。

時刻 t における P の速度を \vec{v} 、加速度を $\vec{\alpha}$ とする。
The coordinates (x, y) of point P at time t are given by the following equation.
Find the magnitude of the velocity and acceleration of P at $t = 2$.

例題 $x = t^2 + 1, y = -t^2 - t + 1$

\vec{v} の x 成分は $\frac{dx}{dt} = 2t$, y 成分は $\frac{dy}{dt} = -2t - 1$

よって、 $t = 1$ のとき、 $\vec{v} = (2, -3)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\vec{\alpha}$ の x 成分は $\frac{d^2x}{dt^2} = 2$, y 成分は $\frac{d^2y}{dt^2} = -2$

よって、 $t = 1$ のとき、 $\vec{\alpha} = (2, -2)$

P の加速度 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

問題 $x = t^2 - 2t, y = t^2 + 1$

①

問題 $x = 3t + 1, y = t^2 - 1$

②

2. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = \frac{1}{2}$ における P の速さ、加速度の大きさを求めよ。

The coordinates (x, y) of point P at time t are given by the following equation.
Find the magnitude of the velocity and acceleration of P at $t = 0.5$.

例題 $x = 4 \cos \pi t, y = \sin 2 \pi t$

時刻 t における P の速度を \vec{v} 、加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

\vec{v} の x 成分は $\frac{dx}{dt} = -4 \pi \sin \pi t$

y 成分は $\frac{dy}{dt} = 2 \pi \cos 2 \pi t$

よって、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、 $\vec{v} = (-4 \pi, -2 \pi)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{(-4 \pi)^2 + (-2 \pi)^2} = 2 \sqrt{5} \pi$

$\vec{\alpha}$ の x 成分は $\frac{d^2x}{dt^2} = -4 \pi^2 \cos \pi t$

y 成分は $\frac{d^2y}{dt^2} = -4 \pi^2 \sin 2 \pi t$

よって、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、 $\vec{\alpha} = (0, -4 \pi^2)$

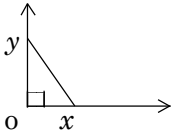
P の加速度 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + (-4 \pi^2)^2} = 4 \pi^2$

問題 $x = \pi t - \sin \pi t, y = 1 - \cos \pi t$

1. 地面に垂直な壁に棒を立てかけ、棒の下端を水平方向に引っ張った。棒の上端の速度を求めよ。
A stick was placed against a wall perpendicular to the ground, and the bottom end of the stick was pulled horizontally. Find the velocity at the top of the rod.
2. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における速さ v の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of velocity v of point P moving on a coordinate plane at time t .

例題 地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ、
下端を速さ 0.2 m/s で水平方向に引っ張った。
棒の下端が壁から 3 m のときの上端の速度を求めよ。

棒の上端を $(0, y)$,
棒の下端を $(x, 0)$ とする。
三平方の定理より



$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \cdots \textcircled{1}$

$x = 3$ のとき、 $3^2 + y^2 = 5^2$ より $y = 4$

x, y は時刻 t の関数であるから、 $\textcircled{1}$ を t で微分して

$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$,

$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = 0.2$, $x = 3$, $y = 4$ を代入して

$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} \times 0.2 = -0.15 \text{ (m/s)}$

問題 地面に垂直な壁に長さ 10 m の棒を立てかけ、
下端を速さ 0.3 m/s で水平方向に引っ張った。
棒の下端が壁から 6 m のときの上端の速度を求めよ。

例題 $x = 4 \cos t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dx}{dt} = -4 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-4 \sin t)^2 + (2 \cos 2t)^2$

$= 16 \sin^2 t + 4 (2 \cos^2 t - 1)^2$

$= 16 (1 - \cos^2 t) + 16 \cos^4 t - 16 \cos^2 t + 4$

$= 16 \cos^4 t - 32 \cos^2 t + 20 = 16 (\cos^2 t - 1)^2 + 4$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ の最大値と最小値は

$0 \leq \cos^2 t \leq 1$ であるから

最大値 20, $\cos^2 t = 0, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値 4, $\cos^2 t = 1, t = 0, \pi, 2\pi$

$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ の最大値と最小値は

最大値 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値 $\sqrt{4} = 2, t = 0, \pi, 2\pi$

問題 $x = 4 \sin t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$