数学Ⅲ　方程式･不等式への応用 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．$x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality when $x>0$.

例題①　$x>0$ のとき，$e^x>\dfrac{x^2}{2}$

$f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと　$f'(x)=e^x-x$

$x>0$ のとき，$e^x>x$ であるから　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき，$f(x)>f(0)=1$

したがって，$x>0$ のとき，$e^x>\dfrac{x^2}{2}$　　Q.E.D

問題①　$x>0$ のとき，$e^x>x$

例題②　$\log x<x^3$

$f(x)=x^3-\log x$　とおくと

$f'(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x^3-1}{x}$

$f(x)$の最小値は　$x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ のとき，

$\dfrac{1}{3}-\log\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{3}(1+\log 3)>0$

したがって，$x>0$ のとき，$\log x<x^3$　　Q.E.D

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$\dfrac{1}{3}(1+\log 3)$	↗

問題②　$\log x<x^2$

2．a を定数とするとき，次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

Find the number of different real solutions to the following equation when a is a constant.

例題　$1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ とおくと

$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}=-\dfrac{2(x+1)}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

$y=f(x)$と $y=a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a<0$のとき　0個，$a=0$のとき　1個

$0<a<1$のとき　2個，$a=1$のとき　0個

$a>1$のとき　2個

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↘	0	↗		↘

問題　$1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}=a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					

数学Ⅲ　方程式·不等式への応用 ② 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．aを定数とするとき，次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

例題　$\dfrac{e^x}{x^2} = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{(e^x)'\,x^2 - e^x\,(x^2)'}{(x^2)^2} = \dfrac{e^x\,(\,x-2\,)}{x^3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$，$\lim_{x\to-0} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$y = f(x)$と $y = a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a \leqq 0$ のとき　0 個　　$0 < a < \dfrac{e^2}{4}$ のとき　1 個

$a = \dfrac{e^2}{4}$ のとき　2 個　　$a > \dfrac{e^2}{4}$ のとき　3 個

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	$\dfrac{e^2}{4}$	↗

問題　$\dfrac{x}{e^x} = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					

2．次の不等式を証明せよ。

例題①　$\log(\,x-1\,) < x$

$f(x) = x - \log(\,x-1\,)$ とおくと　定義域は　$x > 1$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$

$f(x)$の最小値は　$x = 2$ のとき，$2 > 0$

したがって，$x > 0$ のとき，$\log(\,x-1\,) < x$　　Q.E.D

x	1	・・・	2	・・・
$f'(x)$				
$f(x)$				

問題①　$\log(\,x+1\,) \leqq x$

x				
$f'(x)$				
$f(x)$				

例題②　$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$

$f(x) = e^x - (\,1 + x\,)$　とおくと　$f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき，$e^x > 1$ であるから　$f'(x) > 0$

よって，$f(x)$は $x \geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x > 0$ のとき，$f(x) > f(0) = 0$

したがって，$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$　　Q.E.D

問題②　$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

数学Ⅲ　方程式･不等式への応用 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．a を定数とするとき，次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

例題　$x^3 = a(x-2)$の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x-2) - x^3(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$y = f(x)$と $y = a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a > 27$ のとき 3個，　$a = 27$ のとき　2個

$a < 27$ のとき 1個

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↘	27	↗

問題　$x^3 - ax - 2 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

x							
$f'(x)$							
$f(x)$							

2．次の不等式を証明せよ。

例題　$x > 0$ のとき，$x > \sin x$

$f(x) = x - \sin x$ とおくと，実数全体で微分可能

$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$　であるから

$f(x)$はつねに増加する。

ゆえに，$x > 0$ ならば $f(x) > f(0) = 0$

すなわち，$x > 0$ のとき，$x > \sin x$　　Q.E.D

問題①　$x > 0$ のとき，$\cos x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$

問題②　$x > 0$ のとき，$\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$

問題③　$x > 0$ のとき，$e^x > 1 + x$

数学Ⅲ　方程式･不等式への応用 ④ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．a を定数とするとき，次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

例題　$a\,x = \log x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと，定義域は　$x > 0$

$f'(x) = \dfrac{(\log x)'\,x - \log x\,(x)'}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ となるのは $\log x = 1$　より　$x = e$

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

$y = f(x)$と $y = a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a > \dfrac{1}{e}$ のとき 0個，$a = \dfrac{1}{e}$ のとき 1個

$0 < a < \dfrac{1}{e}$ のとき 2個，$a \leqq 0$ のとき 1個

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

問題　$a\,x = (\log x)^2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

2．次の不等式を証明せよ。

例題　$f(x) = \dfrac{a+b+c+x}{4} - \sqrt[4]{a\,b\,c\,x}$ の最小値を求め，$\dfrac{a+b+c+x}{4} \geqq \sqrt[4]{a\,b\,c\,x}$ を証明せよ。

a, b, c は正の定数，$x > 0$ とする。

$f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt[4]{a\,b\,c}}{\sqrt[4]{x^3}}$

$= \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{\sqrt[4]{a\,b\,c}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$

x	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{abc}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘		↗

$f'(x) = 0$ になるのは $x = \sqrt[3]{a\,b\,c}$

$f(\sqrt[3]{a\,b\,c}) = \dfrac{a+b+c+\sqrt[3]{a\,b\,c}}{4} - \sqrt[4]{a\,b\,c\,\sqrt[3]{a\,b\,c}}$

$= \dfrac{a+b+c+\sqrt[3]{a\,b\,c}}{4} - \sqrt[3]{a\,b\,c}$

$= \dfrac{a+b+c-3\sqrt[3]{a\,b\,c}}{4}$

$A = \sqrt[3]{a}$，$B = \sqrt[3]{b}$，$C = \sqrt[3]{c}$ とすると

$\dfrac{a+b+c-3\sqrt[3]{a\,b\,c}}{4} = \dfrac{A^3+B^3+C^3-3ABC}{4}$

$= \dfrac{1}{4}(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$= \dfrac{1}{8}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\} \geqq 0$

よって　$\dfrac{a+b+c+x}{4} \geqq \sqrt[4]{a\,b\,c\,x}$　　Q.E.D

問題　$f(x) = \dfrac{a+b+x}{3} - \sqrt[3]{a\,b\,x}$ の最小値を求め，$\dfrac{a+b+x}{3} \geqq \sqrt[3]{a\,b\,x}$ を証明せよ。

a, b は正の定数，$x > 0$ とする。