

1.  $x > 0$  のとき、次の不等式を証明せよ。  
Prove the following inequality when  $x > 0$ .

例題①  $x > 0$  のとき、 $e^x > \frac{x^2}{2}$

$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$  とおくと  $f'(x) = e^x - x$

$x > 0$  のとき、 $e^x > x$  であるから  $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$  は  $x \geq 0$  で増加する。

ゆえに、 $x > 0$  のとき、 $f(x) > f(0) = 1$

したがって、 $x > 0$  のとき、 $e^x > \frac{x^2}{2}$  Q.E.D

問題①  $x > 0$  のとき、 $e^x > x$

例題②  $\log x < x^3$

$f(x) = x^3 - \log x$  とおくと

$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} = \frac{3x^3 - 1}{x}$

$f(x)$  の最小値は  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$  のとき、

$\frac{1}{3} - \log \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3} (1 + \log 3) > 0$

したがって、 $x > 0$  のとき、 $\log x < x^3$  Q.E.D

$x$	$0$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{3} (1 + \log 3)$	$\nearrow$

問題②  $\log x < x^2$

2.  $a$  を定数とするとき、次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。  
Find the number of different real solutions to the following equation when  $a$  is a constant.

例題  $1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = a$  の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$  とおくと

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{2(x+1)}{x^3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

$y = f(x)$  と  $y = a$  の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a < 0$  のとき  $0$  個、 $a = 0$  のとき  $1$  個

$0 < a < 1$  のとき  $2$  個、 $a = 1$  のとき  $0$  個

$a > 1$  のとき  $2$  個

$x$	$\cdots$	$-1$	$\cdots$	$0$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$		$\searrow$

問題  $1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = a$  の異なる実数解の個数を求めよ。

$x$					
$f'(x)$					
$f(x)$					

1.  $a$ を定数とすると、次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

Find the number of different real solutions to the following equation when  $a$  is a constant.

例題

$$\frac{e^x}{x^2} = a$$
の異なる実数解の個数を求めよ。

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$
とおくと

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$y = f(x)$ と $y = a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a \leq 0$ のとき 0個     $0 < a < \frac{e^2}{4}$ のとき 1個

$a = \frac{e^2}{4}$ のとき 2個     $a > \frac{e^2}{4}$ のとき 3個

$x$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	↗		↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

問題  $\frac{x}{e^x} = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$x$					
$f'(x)$					
$f(x)$					

2. 次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality.

例題①

$\log(x-1) < x$

$f(x) = x - \log(x-1)$ とおくと 定義域は  $x > 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

$f(x)$ の最小値は  $x=2$  のとき、 $2 > 0$

したがって、 $x > 0$ のとき、 $\log(x-1) < x$     Q.E.D

$x$	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	2	↗

問題①  $\log(x+1) \leq x$

$x$				
$f'(x)$				
$f(x)$				

例題②  $x > 0$ のとき、 $e^x > 1 + x$

$f(x) = e^x - (1 + x)$ とおくと  $f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき、 $e^x > 1$ であるから  $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。

ゆえに、 $x > 0$ のとき、 $f(x) > f(0) = 0$

したがって、 $x > 0$ のとき、 $e^x > 1 + x$     Q.E.D

問題②  $x > 0$ のとき、 $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

1.  $a$ を定数とすると、次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

Find the number of different real solutions to the following equation when  $a$  is a constant.

例題  $x^3 = a(x - 2)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = \frac{x^3}{x - 2}$  とおくと

$f'(x) = \frac{(x^3)'(x - 2) - x^3(x - 2)'}{(x - 2)^2}$

$= \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2(x - 3)}{(x - 2)^2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$y = f(x)$ と  $y = a$  の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a > 27$ のとき 3個 ,  $a = 27$  のとき 2個

$a < 27$ のとき 1個

$x$	...	0	...	2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-		-	0	+
$f(x)$	↘	0	↘		↘	27	↗

問題  $x^3 - ax - 2 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$x$							
$f'(x)$							
$f(x)$							

2. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題  $x > 0$  のとき、 $x > \sin x$

$f(x) = x - \sin x$  とおくと、実数全体で微分可能

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$  であるから

$f(x)$ はつねに増加する。

ゆえに、 $x > 0$  ならば  $f(x) > f(0) = 0$

すなわち、 $x > 0$ のとき、 $x > \sin x$  Q.E.D

問題①  $x > 0$  のとき、 $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

問題②  $x > 0$  のとき、 $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$

問題③  $x > 0$  のとき、 $e^x > 1 + x$

1.  $a$ を定数とすると、次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

Find the number of different real solutions to the following equation when  $a$  is a constant.

例題  $ax = \log x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと、定義域は  $x > 0$

$f'(x) = \frac{(\log x)'x - \log x(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$  となるのは  $\log x = 1$  より  $x = e$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$y = f(x)$ と  $y = a$ の共有点の個数が求める実数解の個数と一致するから

$a > \frac{1}{e}$ のとき 0個,  $a = \frac{1}{e}$ のとき 1個

$0 < a < \frac{1}{e}$ のとき 2個,  $a \leq 0$ のとき 1個

$x$	$0$	$\cdots$	$e$	$\cdots$	$\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$0$

問題  $ax = (\log x)^2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$x$	
$f'(x)$	
$f(x)$	

2. 次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality.

例題  $f(x) = \frac{a+b+c+x}{4} - \sqrt[4]{abcx}$ の最小値を求め、 $\frac{a+b+c+x}{4} \geq \sqrt[4]{abcx}$ を証明せよ。

$a, b, c$ は正の定数,  $x > 0$ とする。

$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt[4]{abc}}{\sqrt[4]{x^3}}$

$x$	$0$	$\cdots$	$\sqrt[3]{abc}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

$= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sqrt[4]{abc}}{\sqrt[4]{x^3}} \right)$

$f'(x) = 0$  になるのは  $x = \sqrt[3]{abc}$

$f(\sqrt[3]{abc}) = \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} - \sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$

$= \frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4} - \sqrt[3]{abc}$

$= \frac{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}{4}$

$A = \sqrt[3]{a}, B = \sqrt[3]{b}, C = \sqrt[3]{c}$  とすると

$\frac{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}{4} = \frac{A^3+B^3+C^3-3ABC}{4}$

$= \frac{1}{4} (A+B+C) (A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$= \frac{1}{8} (A+B+C) \{ (A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2 \} \geq 0$

よって  $\frac{a+b+c+x}{4} \geq \sqrt[4]{abcx}$  Q.E.D

問題  $f(x) = \frac{a+b+x}{3} - \sqrt[3]{abx}$ の最小値を求め、 $\frac{a+b+x}{3} \geq \sqrt[3]{abx}$ を証明せよ。

$a, b$ は正の定数,  $x > 0$ とする。