

1. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of the following function.

2. 0 ≤ x のとき、次の関数の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of the following function when 0 ≤ x .

れいだい
例題

$$y = \frac{6x}{x^2 + 9}$$
$$y' = \frac{(6x)'(x^2 + 9) - (6x)(x^2 + 9)'}{(x^2 + 9)^2}$$
$$= \frac{6(x^2 + 9) - (6x)(2x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-6x^2 + 54}{(x^2 + 9)^2}$$
$$= \frac{-6(x^2 - 9)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-6(x + 3)(x - 3)}{(x^2 + 9)^2}$$

y' = 0 になるのは x = -3, 3

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ より, 漸近線は y = 0

x = -3 のとき, y = $\frac{6(-3)}{(-3)^2 + 9} = -1$

x = 3 のとき, y = $\frac{6 \times 3}{3^2 + 9} = 1$

さいだいち
最大値1 (x = 3), さいしやうち
最小値 -1 (x = -3)

x	...	-3	...	3	...
y'	-	0	+	0	-
y		-1		1	

もんだい
問題

$$y = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = \sin^2 x - \cos x$$
$$y' = 2 \sin x \cos x + \sin x = \sin x(2 \cos x + 1)$$

0 ≤ x において, y' = 0 になるのは

sin x = 0 または 2 cos x + 1 = 0 より

x = 0, $\frac{2}{3}$,

x = 0 のとき, sin² 0 - cos² 0 = -1

x = $\frac{2}{3}$ のとき, sin² $\frac{2}{3}$ - cos $\frac{2}{3}$ = $\frac{5}{4}$

x = のとき, sin² - cos = 1

さいだいち
最大値 $\frac{5}{4}$ (x = $\frac{2}{3}$), さいしやうち
最小値 -1 (x = 0)

x	0	...	$\frac{2}{3}$...	
y'	0	+	0	-	0
y	-1		$\frac{5}{4}$		1

もんだい
問題

$$y = \sin^2 x - \sin x$$

x					
y'					
y					

1. つぎの関数のさいだいちとさいしやちを求めよ。

2. 0 ≤ x ≤ π のとき、つぎの関数のさいだいちとさいしやちを求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$$
$$y' = \frac{(4x + 3)'(x^2 + 1) - (4x + 3)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{4(x^2 + 1) - (4x + 3)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-4x^2 - 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(2x - 1)(x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$y' = 0$ になるのは $x = -2, -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ より、ぜんきんせん漸近線は $y = 0$

$x = -2$ のとき、 $y = \frac{4(-2) + 3}{(-2)^2 + 1} = -1$

$x = -\frac{1}{2}$ のとき、 $y = \frac{4 \times -\frac{1}{2} + 3}{(-\frac{1}{2})^2 + 1} = 4$

さいだいち最大値 4 ($x = -\frac{1}{2}$)、さいしやち最小値 -1 ($x = -2$)

x	...	-2	...	-1/2	...
y'	-	0	+	0	-
y		-1		4	

もんだい
問題

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = (1 - \cos x) \sin x$$
$$y' = (1 - \cos x)' \sin x + (1 - \cos x)(\sin x)'$$
$$= \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x$$
$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x - \cos^2 x$$
$$= -2\cos^2 x + \cos x + 1$$
$$= -(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$$

0 ≤ x ≤ π において、 $y' = 0$ になるのは

$2\cos x + 1 = 0$ または $\cos x - 1 = 0$ より

$x = 0, \frac{2}{3}\pi$

さいだいち最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ($x = \frac{2}{3}\pi$)

さいしやち最小値 0 ($x = 0, \pi$)

x	0	...	2/3π	...	π
y'	0	+	0	-	0
y	0		3√3/4		0

もんだい
問題

$$y = (1 - \sin x) \cos x$$

x					
y'					
y					

1. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + 6} \quad (0 \leq x \leq 3)$$
$$y' = \frac{(2x + 1)'(x^2 + 6) - (2x + 1)(x^2 + 6)'}{(x^2 + 6)^2}$$
$$= \frac{-2x^2 - 2x + 12}{(x^2 + 6)^2} = \frac{-2(x - 2)(x + 3)}{(x^2 + 6)^2}$$

ていぎいき
定義域において $y' = 0$ になるのは $x = 2$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = \frac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 6} = \frac{1}{6}$$
$$x = 2 \text{ のとき, } y = \frac{2 \times 2 + 1}{2^2 + 6} = \frac{1}{2}$$
$$x = 3 \text{ のとき, } y = \frac{2 \times 3 + 1}{3^2 + 6} = \frac{7}{15}$$

さいだいち
最大値

 $\frac{1}{2}$ ($x = 2$),

さいしやうち
最小値

 $\frac{1}{6}$ ($x = 0$)

x	0	...	2	...	3
y'		+	0	-	
y	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{15}$

もんだい
問題

$$y = \frac{4x + 2}{x^2 + 2} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = 2 \sin x + \cos^2 x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$
$$y = 2 \sin x + (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x + 2 \sin x$$
$$y' = -2 \sin x \cos x + 2 \cos x = -2 \cos x (\sin x - 1)$$
$$0 \leq x \leq \pi \text{ において, } y' = 0 \text{ になるのは}$$
$$\cos x = 0 \text{ または } \sin x - 1 = 0 \text{ より } x = \frac{\pi}{2}$$
$$x = 0 \text{ のとき, } 2 \sin 0 + \cos^2 0 = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 2$$
$$x = \pi \text{ のとき, } 2 \sin \pi + \cos^2 \pi = 1$$

さいだいち
最大値

 2 ($x = \frac{\pi}{2}$),

さいしやうち
最小値

 1 ($x = 0, \pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π
y'	0	+	0	-	0
y	1		2		1

もんだい
問題

$$y = 2 \cos x + \sin^2 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

x					
y'					
y					

- つぎかんすうさいだいちさいしやうちもと
1. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
- つぎかんすうさいだいちさいしやうちもと
2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{4x - 3}{x^2 + 1} \quad (0 \leq x \leq 3)$$
$$y' = \frac{(4x - 3)'(x^2 + 1) - (4x - 3)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(2x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

ていぎいき
定義域において $y' = 0$ になるのは $x = 2$

$x = 0$ のとき, $y = \frac{4 \times 0 - 3}{0^2 + 1} = -3$

$x = 2$ のとき, $y = \frac{4 \times 2 - 3}{2^2 + 1} = 1$

$x = 3$ のとき, $y = \frac{4 \times 3 - 3}{3^2 + 1} = \frac{9}{10}$

さいしやうち
最小値 -3 ($x = 0$), さいだいち
最大値 1 ($x = 2$)

x	0	...	2	...	3
y'		+	0	-	
y	-3		1		$\frac{9}{10}$

もんだい
問題

$$y = \frac{4x - 1}{x^2 + 3} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = x - \sqrt{2 - x^2}$$

ていぎいき
定義域は $2 - x^2 \geq 0$ より $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\sqrt{2 - x^2} + x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$\sqrt{2 - x^2} + x = 0$ を解く。
 $\sqrt{2 - x^2} = -x$ より, $x < 0$
 $2 - x^2 = x^2, 2(1 - x^2) = 2(1 - x)(1 + x) = 0$
 $y' = 0$ になるのは $x < 0$ より $x = -1$
 $x = -1$ のとき, $y = -1 - 1 = -2$
 $x = -\sqrt{2}$ のとき, $y = -\sqrt{2}$
 $x = \sqrt{2}$ のとき, $y = \sqrt{2}$

さいだいち
最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \sqrt{2}$), さいしやうち
最小値 -2 ($x = -1$)

x	$-\sqrt{2}$...	-1	...	$\sqrt{2}$
y'		-	0	+	
y	$-\sqrt{2}$		-2		$\sqrt{2}$

もんだい
問題

$$y = x + \sqrt{4 - x^2}$$

x					
y'					
y					

1. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
2. 次の関数の最大値 M と最小値 m を求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 3}$$
$$y' = \frac{(4x + 1)'(x^2 + 3) - (4x + 1)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2}$$
$$= \frac{4(x^2 + 3) - (4x + 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$
$$= \frac{-4x^2 - 2x + 12}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2(2x - 3)(x + 2)}{(x^2 + 3)^2}$$

$y' = 0$ になるのは $x = -2, -\frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ より、漸近線は $y = 0$

$x = -2$ のとき, $y = \frac{4(-2) + 1}{(-2)^2 + 3} = -1$

$x = -\frac{3}{2}$ のとき, $y = \frac{4 \times -\frac{3}{2} + 1}{(-\frac{3}{2})^2 + 3} = \frac{4}{3}$

さいしょうち
最小値 -1 ($x = -2$), さいだいち
最大値 $\frac{4}{3}$ ($x = -\frac{3}{2}$)

x	...	-2	...	$-\frac{3}{2}$...
y'	-	0	+	0	-
y		-1		$\frac{4}{3}$	

もんだい
問題

$$y = \frac{2x + 3}{x^2 + 4}$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = \cos^3 x + 2 \sin^3 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y' = 3 \cos^2 x (-\sin x) + 6 \sin^2 x \cos x$$
$$= -3 \cos x \sin x (\cos x - 2 \sin x)$$

$\cos x - 2 \sin x = 0$ となる x を a とおく。

ただし, $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}, \cos a - 2 \sin a = 0$

$\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$y' = 0$ になるのは $x = 0, a, \frac{\pi}{2}$

$x = 0$ のとき, $y = \cos^3 0 + 2 \sin^3 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき, $y = \cos^3 \frac{\pi}{2} + 2 \sin^3 \frac{\pi}{2} = 2$

$x = a$ のとき, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{9\sqrt{5}}{25}$

さいだいち
最大値 2 ($x = \frac{\pi}{2}$), さいしょうち
最小値 $\frac{9\sqrt{5}}{25}$ ($x = a$)

ただし, a は $\sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

x	0	...	a	...	$\frac{\pi}{2}$
y'	0	-	0	+	0
y	1		$\frac{9\sqrt{5}}{25}$		2

もんだい
問題

$$y = 2 \cos^3 x + 3 \sin^3 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

x					
y'					
y					

- つぎ かんすう さいだいち さいしやうち もと
1．次の関数の最大値と最小値を求めよ。
- つぎ かんすう さいだいち さいしやうち もと
2．次の関数の最大値と最小値を求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{2x - 3}{x^2 + 4} \quad (-2 \leq x \leq 0)$$
$$y' = \frac{(2x - 3)'(x^2 + 4) - (2x - 3)(x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2}$$
$$= \frac{-2x^2 + 6x + 8}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-2(x + 1)(x - 4)}{(x^2 + 4)^2}$$

ていぎいき
定義域において $y' = 0$ になるのは $x = -1$

$x = -2$ のとき , $y = \frac{2 \times (-2) - 3}{(-2)^2 + 4} = -\frac{7}{8}$

$x = -1$ のとき , $y = \frac{2 \times (-1) - 3}{2^2 + 4} = -1$

$x = 0$ のとき , $y = \frac{2 \times 0 - 3}{0^2 + 4} = -\frac{3}{4}$

さいしやうち さいだいち
最小値 -1 ($x = -1$) , 最大値 $-\frac{3}{4}$

x	-2	...	-1	...	0
y'		-	0	+	
y	$-\frac{7}{8}$		-1		$-\frac{3}{4}$

もんだい
問題

$$y = \frac{2x - 2}{x^2 + 3} \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = x\sqrt{4x - x^2}$$

ていぎいき
定義域は $4x - x^2 \geq 0$ より $0 \leq x \leq 4$

$$y' = \sqrt{4x - x^2} + x \times \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$$
$$= \frac{4x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} + \frac{2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}}$$
$$= \frac{6x - 2x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-2x(x - 3)}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$y' = 0$ になるのは $x = 3$

$x = 0, 4$ のとき , $y = 0$

$x = 3$ のとき , $y = 3\sqrt{3}$

さいだいち さいしやうち
最大値 $3\sqrt{3}$ ($x = 3$) , 最小値 0 ($x = 0, 4$)

x	0	...	3	...	4
y'		+	0	-	
y	0		$3\sqrt{3}$		0

もんだい
問題

$$y = x\sqrt{8x - x^2}$$

x					
y'					
y					

1. つぎかんすうさいだいちさいしやうちもと
次の関数の最大値と最小値を求めよ。
2. つぎかんすうさいだいちさいしやうちもと
次の関数の最大値と最小値を求めよ。

れいだい
例題

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 5} \quad (0 \leq x \leq 3)$$
$$y' = \frac{(4x + 1)'(x^2 + 5) - (4x + 1)(x^2 + 5)'}{(x^2 + 5)^2}$$
$$= \frac{-4x^2 - 2x + 20}{(x^2 + 5)^2} = \frac{-2(2x + 5)(x - 2)}{(x^2 + 5)^2}$$

ていぎいき
定義域において $y' = 0$ になるのは $x = 2$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = \frac{4 \times 0 + 1}{0^2 + 5} = \frac{1}{5}$$
$$x = 2 \text{ のとき, } y = \frac{4 \times 2 + 1}{2^2 + 5} = 1$$
$$x = 3 \text{ のとき, } y = \frac{4 \times 3 + 1}{3^2 + 5} = \frac{13}{14}$$

さいしやうち
最小値 $\frac{1}{5}$ ($x = 0$), さいだいち
最大値 1 ($x = 2$)

x	0	...	2	...	3
y'		+	0	-	
y	$\frac{1}{5}$		1		$\frac{13}{14}$

もんだい
問題

$$y = \frac{x + 1}{x^2 + 3} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

x					
y'					
y					

れいだい
例題

$$y = x^2 e^{-2x} \quad (-1 \leq x \leq 2)$$
$$y' = (x^2)'e^{-2x} + x^2(e^{-2x})'$$
$$= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = 2x(1 - x)e^{-2x}$$

ていぎいき
定義域において $y' = 0$ になるのは $x = 0, 1$

$$x = -1 \text{ のとき } y = (-1)^2 e^{-2(-1)} = e^2$$
$$x = 0 \text{ のとき } y = 0^2 e^{-2 \times 0} = 0$$
$$x = 1 \text{ のとき } y = 1^2 e^{-2 \times 1} = e^{-2}$$
$$x = 2 \text{ のとき } y = 2^2 e^{-2 \times 2} = 4e^{-4}$$

さいだいち
最大値 e^2 ($x = -1$), さいしやうち
最小値 0 ($x = 0$)

x	-1	...	0	...	1	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	e^2		0		e^{-2}		$4e^{-4}$

もんだい
問題

$$y = x^2 e^{1-x} \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

x							
y'							
y							

