数学Ⅲ　関数のグラフ ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の曲線の凹凸を調べ，変曲点の座標を求めよ。
Examine the unevenness of the following curve and find the coordinates of the inflection point.

例題　$y = x^4 - 6x^2$

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$

$y'' = 0$ とすると $x = -1, 1$

$x < -1$，$x > 1$で下に凸，　$-1 < x < 1$ で上に凸

変曲点の座標は$(-1, -6)$，$(-1, -6)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	-6	上に凸	-6	下に凸

問題①　$y = x^3 - 6x^2$

x	
y''	
y	

問題②　$y = xe^{-x}$

x	
y''	
y	

2．次の曲線の凹凸を調べ，グラフの概形を描きなさい。
Examine the unevenness of the following curve and draw the outline of the graph.

例題　$y = e^{-x^2}$　　※偶関数(左右対称)

$y' = (-x^2)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$

$y'' = (-2x)'(e^{-x^2}) + (-2x)(e^{-x^2})'$

$= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2xe^{-x^2})$

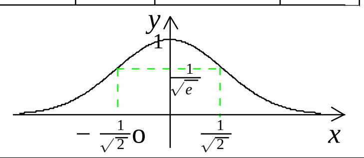
$= (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$y'' = 0$ となるのは　$x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	↘

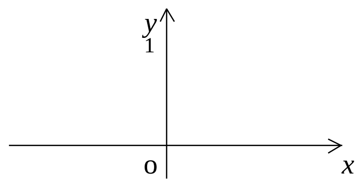
$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$

x 軸が漸近線



問題　$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

x							
y'							
y''							
y							



数学Ⅲ 関数のグラフ ② 課題 ( )年( )組( )番( )

例題① $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ を簡単な式で表せ。

$$y = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x(x+1) - x}{x+1}$$

$$= \frac{x(x+1) - (x+1) + 1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

例題② $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ のグラフを描きなさい。

$$y' = (x-1)' + \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

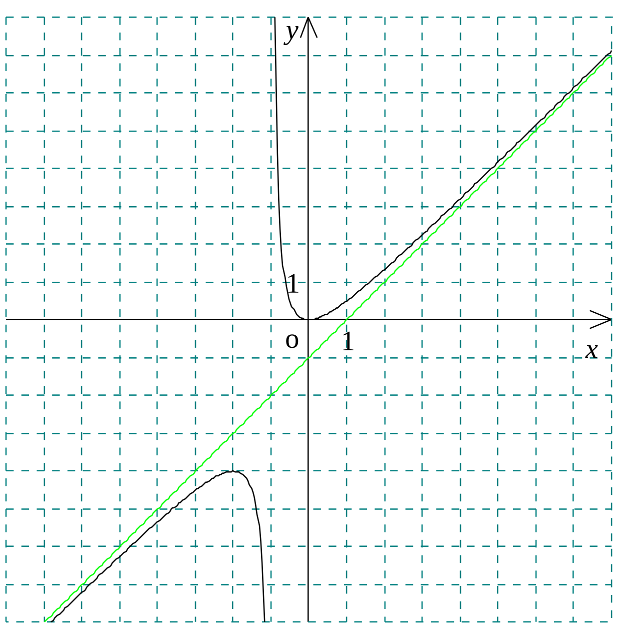
$$y'' = (1)' - \left\{\frac{1}{(x+1)^2}\right\}' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \to -1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} y = -\infty$$

$y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ であるから

漸近線は $y = x - 1$ と $x = -1$ である。

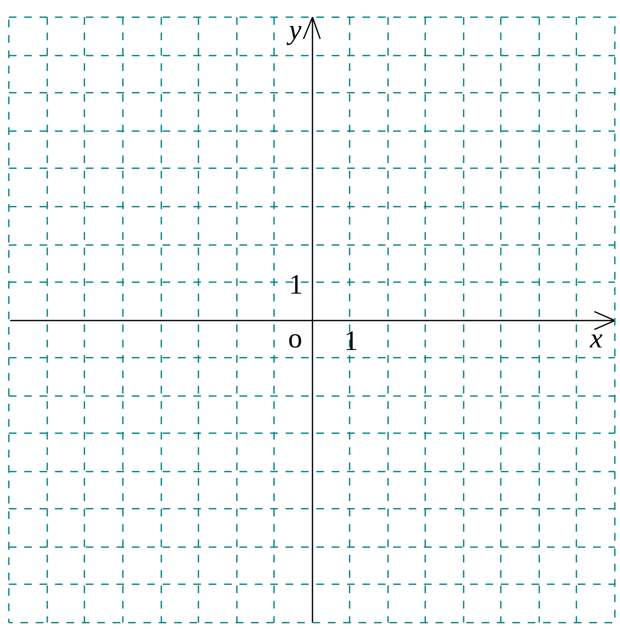
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↗	-4	↘		↘	0	↗



問題① $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ を簡単な式で表せ。

問題② $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ のグラフを描きなさい。

x			
y'			
y''			
y			



数学Ⅲ　関数のグラフ ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題①　$y = x^3 - 3x + 2$ のグラフを描きなさい。

$3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x = -1$ のとき，$y' = 0$，$y = -3$

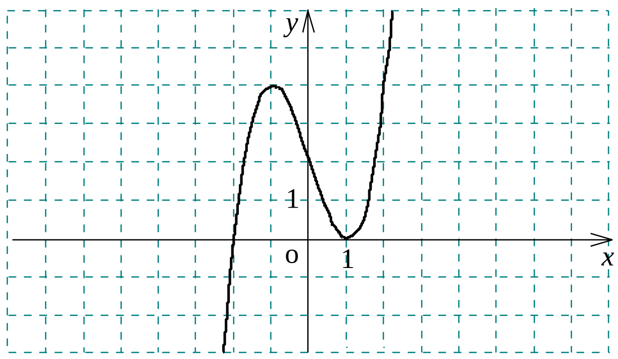
$x = 1$ のとき，$y' = 0$，$y = 0$

$y'' = 6x$ より，$x = 0$ が変曲点

$x < 0$ のとき $y'' < 0$

$x > 0$ のとき $y'' > 0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	-3	↘	2	↘	0	↗



例題②　$y = x\sqrt{6-x}$　のグラフを描きなさい。

$y' = x'\sqrt{6-x} + x\left(\sqrt{6-x}\right)'$

$= \sqrt{6-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{6-x}} = \dfrac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}$

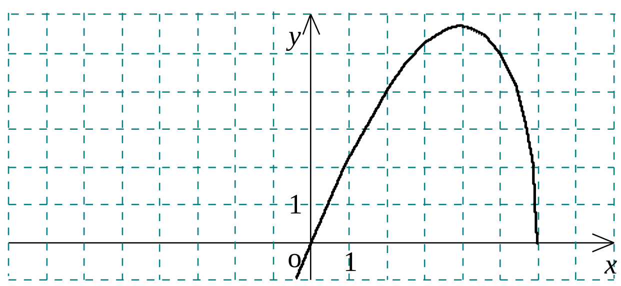
$y'' = \dfrac{(12-3x)'\,2\sqrt{6-x} - (12-3x)\left(2\sqrt{6-x}\right)'}{\left(2\sqrt{6-x}\right)^2}$

$= \dfrac{-3(24-4x)+(24-6x)}{\left(2\sqrt{6-x}\right)^3} = \dfrac{6(x-8)}{\left(2\sqrt{6-x}\right)^3}$

$x = 4$ のとき，$y' = 0$，$y = 4\sqrt{6-4} = 4\sqrt{2}$

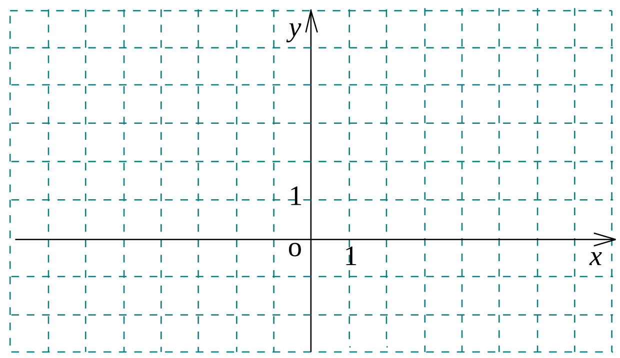
$x \leqq 6$ であるから，$y'' < 0$　　変曲点なし

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	-
y	↗	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0



問題①　$y = x^3 - 3x^2 + 2$ のグラフを描描きなさい。

x							
y'							
y''							
y							



問題②　$y = x\sqrt{x+3}$　のグラフを描描きなさい。

x						
y'						
y''						
y