

数学Ⅲ 関数のグラフ ① 課題

1. 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点の座標を求めよ。
Examine the unevenness of the following curve and find the coordinates of the inflection point.

例題 $y = x^4 - 6x^2$

$y' = 4x^3 - 12x$
 $y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$
 $y'' = 0$ とすると $x = -1, 1$
 $x < -1, x > 1$ で下に凸, $-1 < x < 1$ で上に凸
変曲点の座標は $(-1, -6), (1, -6)$

x	...	-1	...	1	...
y''	+	0	-	0	+
y	下に凸	-6	上に凸	-6	下に凸

問題① $y = x^3 - 6x^2$

x	
y''	
y	

問題② $y = xe^{-x}$

x	
y''	
y	

()年()組()番()

2. 次の曲線の凹凸を調べ、グラフの概形を描きなさい。
Examine the unevenness of the following curve and draw the outline of the graph.

例題 $y = e^{-x^2}$ ※偶関数(左右対称)

$y' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$
 $y'' = (-2x)'(e^{-x^2}) + (-2x)(e^{-x^2})'$
 $= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2xe^{-x^2})$
 $= (4x^2 - 2)e^{-x^2}$
 $y'' = 0$ となるのは $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		1		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$
 x 軸が漸近線

問題 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

x							
y'							
y''							
y							

例題①

$y = \frac{x^2}{x + 1}$

を簡単な式で表 せ。

$$y = \frac{x^2}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - x}{x + 1}$$
$$= \frac{x(x + 1) - (x + 1) + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$$

例題②

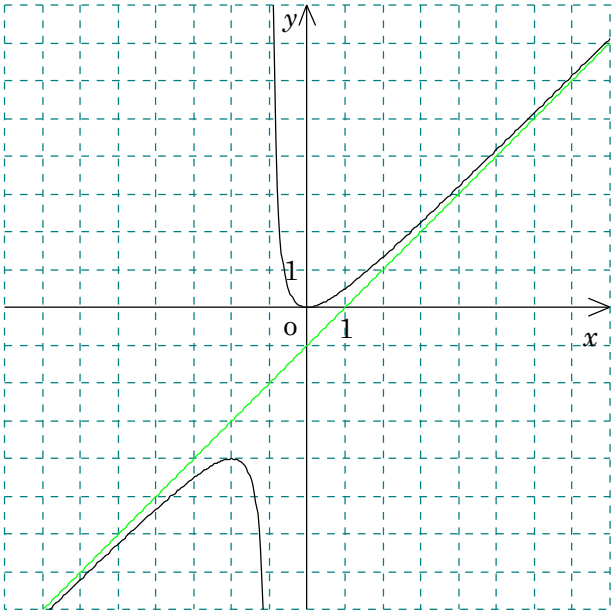
$y = \frac{x^2}{x + 1}$

のグラフを描きなさい。

$$y' = (x - 1)' + \left(\frac{1}{x + 1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$
$$y'' = (1)' - \left\{\frac{1}{(x + 1)^2}\right\}' = \frac{2}{(x + 1)^3}$$
$$\lim_{x \rightarrow -1 - 0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1 + 0} y = -\infty$$
$$y = \frac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1} \text{ であるから}$$

漸近線は $y = x - 1$ と $x = -1$ である。

x	...	-2	...	-1	...	0	...
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y	↶	-4	↷		↷	0	↶



問題①

$y = \frac{x^2 + 1}{x}$

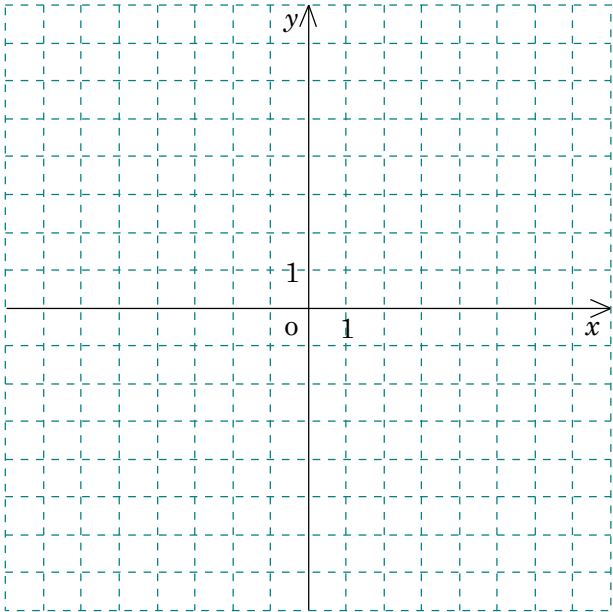
を簡単な式で表 せ。

問題②

$y = \frac{x^2 + 1}{x}$

のグラフを描きなさい。

x			
y'			
y''			
y			



例題① $y = x^3 - 3x + 2$ のグラフを描きなさい。
Draw the graph

$3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

$x = -1$ のとき, $y' = 0$, $y = -3$

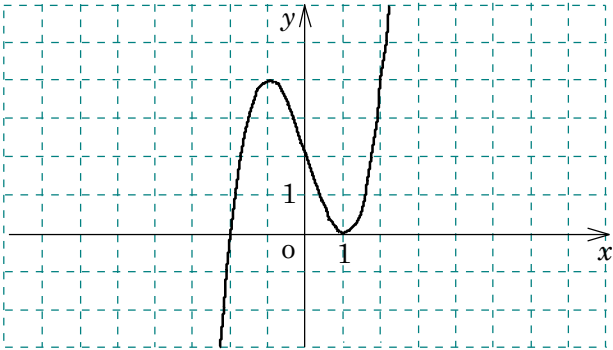
$x = 1$ のとき, $y' = 0$, $y = 0$

$y'' = 6x$ より, $x = 0$ が変曲点

$x < 0$ のとき $y'' < 0$

$x > 0$ のとき $y'' > 0$

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y		-3		2		0	



例題② $y = x\sqrt{6-x}$ のグラフを描きなさい。
Draw the graph

$y' = x'\sqrt{6-x} + x(\sqrt{6-x})'$

$= \sqrt{6-x} - \frac{x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}$

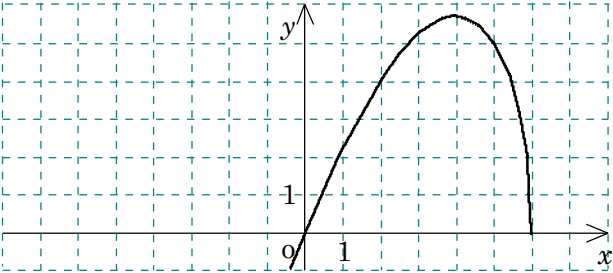
$y'' = \frac{(12-3x)'2\sqrt{6-x} - (12-3x)(2\sqrt{6-x})'}{(2\sqrt{6-x})^2}$

$= \frac{-3(24-4x) + (24-6x)}{(2\sqrt{6-x})^3} = \frac{6(x-8)}{(2\sqrt{6-x})^3}$

$x = 4$ のとき, $y' = 0$, $y = 4\sqrt{6-4} = 4\sqrt{2}$

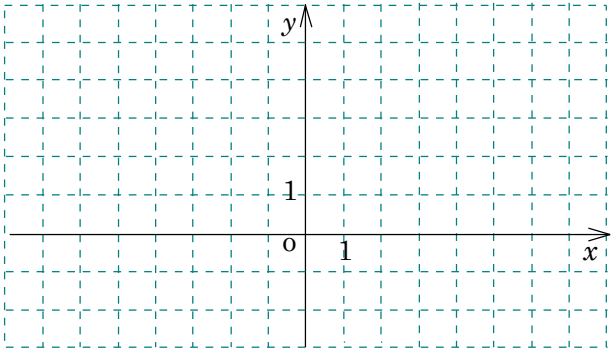
$x \leq 6$ であるから, $y'' < 0$ 変曲点なし

x	...	0	...	4	...	6
y'	+	+	+	0	-	0
y''	-	-	-	-	-	-
y		0		$4\sqrt{2}$		0



問題① $y = x^3 - 3x^2 + 2$ のグラフを描きなさい。

x							
y'							
y''							
y							



問題② $y = x\sqrt{x+3}$ のグラフを描きなさい。

x							
y'							
y''							
y							

