

数学III 関数のグラフ ① 課題

( )年( )組( )番( )

1. 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点の座標を求めよ。  
 Examine the unevenness of the following curve and find the coordinates of the inflection point.

例題  $y = x^4 - 6x^2$

$y' = 4x^3 - 12x$   
 $y'' = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$   
 $y'' = 0$  とすると  $x = -1, 1$   
 $x < -1, x > 1$  で下に凸,  $-1 < x < 1$  で上に凸  
 変曲点の座標は  $(-1, -6), (1, -6)$

$x$	...	-1	...	1	...
$y''$	+	0	-	0	+
$y$	下に凸	-6	上に凸	-6	下に凸

問題①  $y = x^3 - 6x^2$

$x$	
$y''$	
$y$	

問題②  $y = xe^{-x}$

$x$	
$y''$	
$y$	

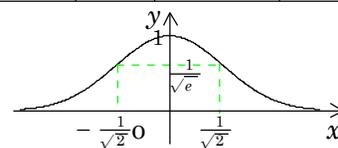
2. 次の曲線の凹凸を調べ、グラフの概形を描きなさい。  
 Examine the unevenness of the following curve and draw the outline of the graph.

例題  $y = e^{-x^2}$  ※偶関数(左右対称)

$y' = (-x^2)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$   
 $y'' = (-2x)'(e^{-x^2}) + (-2x)(e^{-x^2})'$   
 $= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2xe^{-x^2})$   
 $= (4x^2 - 2)e^{-x^2}$   
 $y'' = 0$  となるのは  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

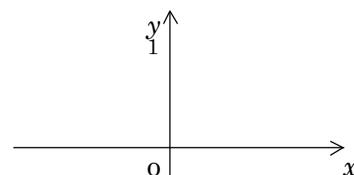
$x$	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$y'$	+	+	+	0	-	-	-
$y''$	+	0	-	-	-	0	+
$y$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$   
 $x$  軸が漸近線



問題  $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$x$							
$y'$							
$y''$							
$y$							



例題①  $y = \frac{x^2}{x+1}$  を簡単な式で表せ。  
かんたん しき あらわ simple expression

$$y = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x(x+1) - x}{x+1}$$

$$= \frac{x(x+1) - (x+1) + 1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

例題②  $y = \frac{x^2}{x+1}$  のグラフを描きなさい。  
か Draw the graph

$$y' = (x-1)' + \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

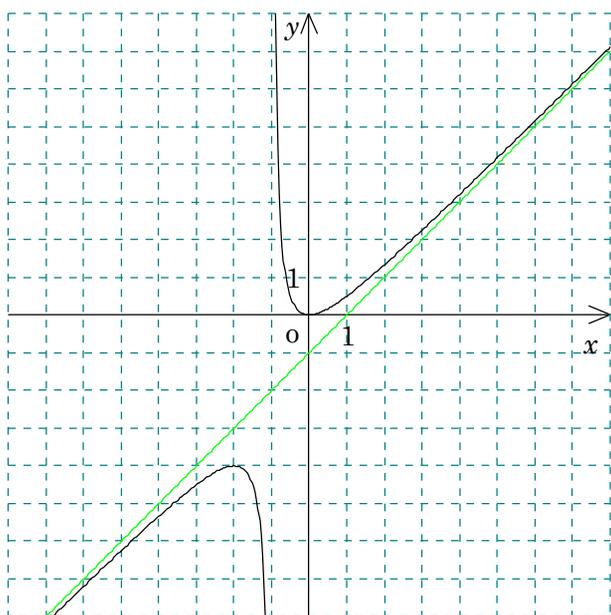
$$y'' = (1)' - \left\{\frac{1}{(x+1)^2}\right\}' = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y = -\infty$$

$$y = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \text{ であるから}$$

漸近線は  $y = x - 1$  と  $x = -1$  である。

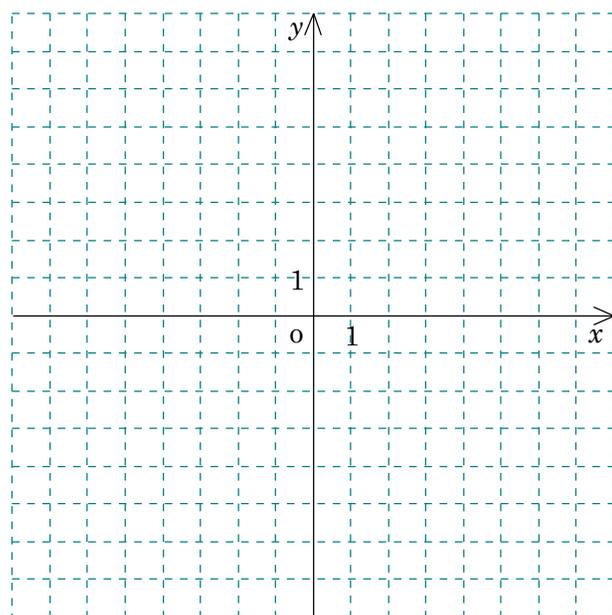
$x$	...	-2	...	-1	...	0	...
$y'$	+	0	-	/	-	0	+
$y''$	-	-	-	/	+	+	+
$y$	↪	-4	↩	/	↩	0	↪



問題①  $y = \frac{x^2+1}{x}$  を簡単な式で表せ。  
かんたん しき あらわ

問題②  $y = \frac{x^2+1}{x}$  のグラフを描きなさい。  
か

$x$			
$y'$		/	
$y''$		/	
$y$		/	



例題①  $y = x^3 - 3x + 2$  のグラフを描きなさい。

Draw the graph

$$3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$x = -1 \text{ のとき, } y' = 0, y = -3$$

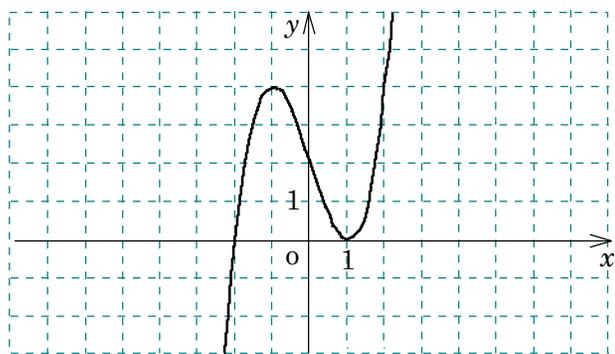
$$x = 1 \text{ のとき, } y' = 0, y = 0$$

$$y'' = 6x \text{ より, } x = 0 \text{ が変曲点}$$

$$x < 0 \text{ のとき } y'' < 0$$

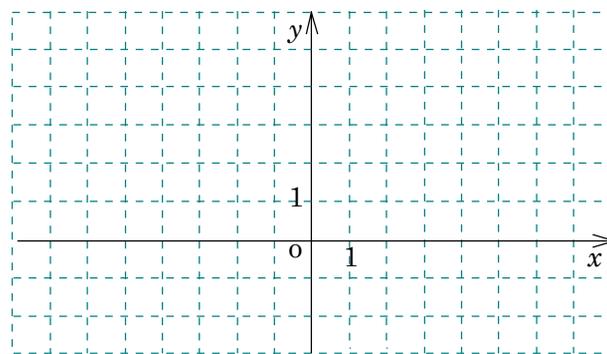
$$x > 0 \text{ のとき } y'' > 0$$

$x$	...	-1	...	0	...	1	...
$y'$	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	-	-	0	+	+	+
$y$	↖	-3	↘	2	↘	0	↗



問題①  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  のグラフを描きなさい。

$x$							
$y'$							
$y''$							
$y$							



例題②  $y = x\sqrt{6-x}$  のグラフを描きなさい。

Draw the graph

$$y' = x' \sqrt{6-x} + x(\sqrt{6-x})'$$

$$= \sqrt{6-x} - \frac{x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}$$

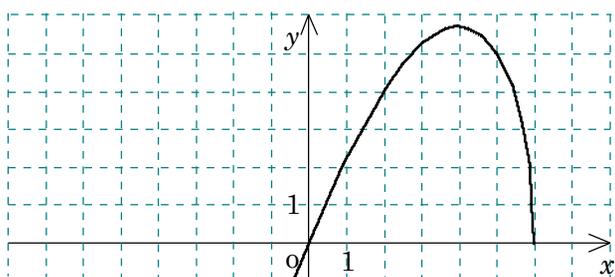
$$y'' = \frac{(12-3x)' 2\sqrt{6-x} - (12-3x)(2\sqrt{6-x})'}{(2\sqrt{6-x})^2}$$

$$= \frac{-3(24-4x) + (24-6x)}{(2\sqrt{6-x})^3} = \frac{6(x-8)}{(2\sqrt{6-x})^3}$$

$$x = 4 \text{ のとき, } y' = 0, y = 4\sqrt{6-4} = 4\sqrt{2}$$

$$x \leq 6 \text{ であるから, } y'' < 0 \text{ 変曲点なし}$$

$x$	...	0	...	4	...	6
$y'$	+	+	+	0	-	0
$y''$	-	-	-	-	-	-
$y$	↖	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0



問題②  $y = x\sqrt{x+3}$  のグラフを描きなさい。

$x$						
$y'$						
$y''$						
$y$						

