数学Ⅲ　関数の増減と極値①　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1．次の関数が単調に増加することを示せ。

Show that the following function increases monotonically.

例題①　$f(x) = 2x - \sin x$

$f'(x) = 2 - \cos x$，　$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より，

$f'(x) > 0$ になり，$f(x)$ は単調に増加する。

問題①　$f(x) = 2x + \cos x$

例題②　$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2)$

$= 3\{(x-1)^2 + 1\} > 0$

$f'(x) > 0$ になり，$f(x)$ は単調に増加する。

問題②　$f(x) = x^3 + 12x$

2．次の関数の増減を調べよ。　※関数の定義域は $x > 0$

Check the increase and decrease of the following functions.

※ The domain of the function is $x > 0$.

例題

$f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1$

x	0	…	1	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	−2	↗

$f(x)$ は

$0 < x < 1$ で減少し

$x > 1$ で増加する。

問題

$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

3．次の関数の極値を求めなさい。

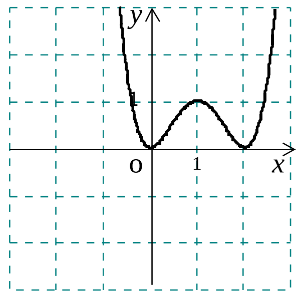
Find the extremum value of the following function.

例題　$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$y' = 4x^3 - 12x^3 + 8x$

$= 4x(x-1)(x-2)$

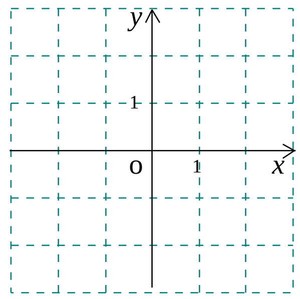
$y' = 0$ の解は $x = 0, 1, 2$



極大値 1 $(x = 1)$　極小値 0 $(x = 0, 2)$

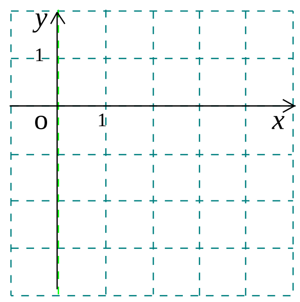
x	…	0	…	1	…	2	…
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

問題①　$y = x^4 - 2x^2$



x							
y'							
y							

問題②　$y = x - 4\sqrt{x}$



x	0	
y'		
y		

数学Ⅲ　関数の増減と極値②　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の関数を微分せよ。

例題　関数 $f(x)= x\sqrt{x+6}$ を微分せよ。

$$f'(x)=(x)'\sqrt{x+6}+x\left(\sqrt{x+6}\right)'$$

$$=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$$

問題　関数 $f(x)= x\sqrt{x+3}$ を微分せよ。

2．次の関数の極値を求めよ。

例題　関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+6}$ の極値を求めよ。

$x \geqq 0$ のとき　$f(x)= x\sqrt{x+6}$

$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}>0$

$-6 \leqq x<0$ のとき　$f(x)=-x\sqrt{x+6}$

$-6<x<0$ において $f'(x)=-\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$

$f'(x)=0$ とすると $x=-4$

$f(x)$ は極大値 $4\sqrt{2}$ $(x=-4)$，極小値 0 $(x=0)$

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0	↗

問題　関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ の極値を求めよ。

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

3．次の関数が $x=1$ で極値をとるように定数 a の値を定めよ。また，このときの関数の極値を求めよ。

例題　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x+1}$

$$f(x)=\frac{x(x+1)+(x+1)+a-1}{x+1}$$

$$=x+1+\frac{a-1}{x+1}$$

$$f'(x)=1-\frac{a-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a+2}{(x+1)^2}$$

$f(x)$は $x=1$ で微分可能であり，極値をとるから

$f'(1)=0$ になる。

$1^2+2\times1-a+2=0$ より　$a=5$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$f(x)$は $x=1$ で極値をとり，条件を満たす。

$a=5$，極大値 -4 $(x=-3)$，極小値 4 $(x=1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	／	↘	4	↗

問題　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x+1}$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

数学Ⅲ　関数の増減と極値③　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1．次の関数を微分せよ。

例題　$f(x)=xe^{-x^2}$

$f'(x)=(x)'e^{-x^2}+x(e^{-x^2})'$

$=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

問題　$f(x)=xe^{-x}$

2．次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。

例題①　$f(x)=x^3+6x^2-5$

$f'(x)=3x^2+12x=3x\left(x+4\right)$

$f''(x)=6x+12$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,-4$

$x=0$ のとき，　$f''(0)>0$ より，極小値 $f(0)=-5$

$x=-4$ のとき，$f''(-4)>0$ より，極大値 $f(-4)=27$

問題①　$f(x)=x^3-3x+2$

例題②　$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x-1\right)^2$

$f''(x)=6x-6$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$，$f''(1)=0$

$f'(x)\geqq 0$ より，$f(1)$ は極値でない。

問題②　$f(x)=x^3+6x^2+12x$

3．次の関数の極値を求めよ。

例題　関数 $f(x)=\left|x\right|e^{-x^2}$ の極値を求めよ。

$x>0$ のとき　$f(x)=xe^{-x^2}$

$x>0$ において　$f'(x)=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$f'(x)=0$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

$x<0$ のとき　$f(x)=-xe^{-x^2}$

$x<0$ において　$f'(x)=\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$f'(x)=0$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

$x=0$ のとき　$f(x)=0$

$f(x)$は極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ $\left(x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

極小値 $0\left(x=0\right)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$	↘

問題　関数 $f(x)=\left|x\right|e^{-x}$ の極値を求めよ。

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					