数学Ⅲ　関数の増減と極値①課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．次の関数が単調に増加することを示せ。

Show that the following function increases monotonically.

例題① $f(x) = 2x - \sin x$

$f'(x) = 2 - \cos x$，　$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より，

$f'(x) > 0$ になり，$f(x)$ は単調に増加する。

問題① $f(x) = 2x + \cos x$

例題② $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3\left(x^2 - 2x + 2\right)$

$= 3\left\{\left(x - 1\right)^2 + 1\right\} > 0$

$f'(x) > 0$ になり，$f(x)$ は単調に増加する。

問題② $f(x) = x^3 + 12x$

2．次の関数の増減を調べよ。※関数の定義域は $x > 0$

Check the increase and decrease of the following functions.

※ The domain of the function is $x > 0$.

例題

$f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-2	↗

$f(x)$ は

$0 < x < 1$ で減少し

$x > 1$ で増加する。

問題

$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

3．次の関数の極値を求めなさい。

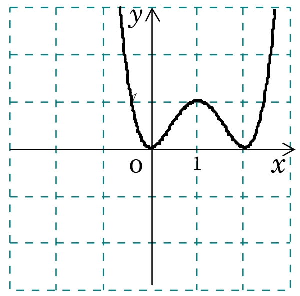
Find the extremum value of the following function.

例題 $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$y' = 4x^3 - 12x^3 + 8x$

$= 4x(x - 1)(x - 2)$

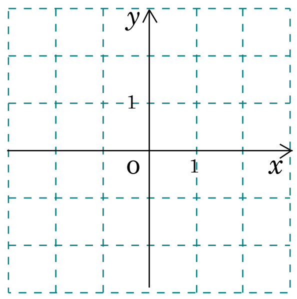
$y' = 0$ の解は $x = 0, 1, 2$



極大値 1 $(x = 1)$　極小値 0 $(x = 0, 2)$

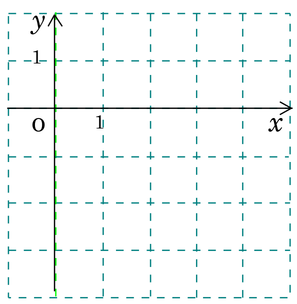
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

問題① $y = x^4 - 2x^2$



x							
y'							
y							

問題② $y = x - 4\sqrt{x}$



x	0	
y'		
y		

数学Ⅲ　関数の増減と極値②　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1. 次の関数を微分せよ。　Differentiate the next function.

例題　関数 $f(x)= x\sqrt{x+6}$ を微分せよ。

$$f'(x)=(x)'\sqrt{x+6}+x\left(\sqrt{x+6}\right)'$$

$$=\sqrt{x+6}+\frac{x}{2\sqrt{x+6}}=\frac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$$

問題　関数 $f(x)= x\sqrt{x+3}$ を微分せよ。

2. 次の関数の極値を求めよ。

Find the extremum of the following function.

例題　関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+6}$ の極値を求めよ。

$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=x\sqrt{x+6}$

$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}>0$

$-6\leqq x<0$ のとき　$f(x)=-x\sqrt{x+6}$

$-6<x<0$ において $f'(x)=-\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+6}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-4$

$f(x)$ は極大値 $4\sqrt{2}$ $(x=-4)$，極小値 0 $(x=0)$

x	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
$f(x)$	0	↗	$4\sqrt{2}$	↘	0	↗

問題　関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ の極値を求めよ。

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

3. 次の関数が $x=1$ で極値をとるように定数 a の値を定めよ。また，このときの関数の極値を求めよ。

Determine the value of the constant a so that the following function takes an extreme value at x=1. Also, find the extreme value of the function in this case.

例題　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x+1}$

$$f(x)=\frac{x(x+1)+(x+1)+a-1}{x+1}$$

$$=x+1+\frac{a-1}{x+1}$$

$$f'(x)=1-\frac{a-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a+2}{(x+1)^2}$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能であり，極値をとるから

$f'(1)=0$ になる。

$1^2+2\times1-a+2=0$ より　$a=5$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$f(x)$ は $x=1$ で極値をとり，条件を満たす。

$a=5$，極大値 -4 $(x=-3)$，極小値 4 $(x=1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	／	↘	4	↗

問題　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x+1}$

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

数学Ⅲ　関数の増減と極値③ 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1． 次の関数を微分せよ。　Differentiate the next function.

例題　$f(x)= x\,e^{-x^2}$

$f'(x)=(x)'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})'$

$= e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$

問題　$f(x)= x\,e^{-x}$

2． 次の関数の極値を，第 2 次導関数を利用して求めよ。
Find the extreme value of the following function using the second derivative.

例題①　$f(x)= x^3 + 6x^2 - 5$

$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

$f''(x)=6x+12$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ -4$

$x=0$ のとき，$f''(0)>0$ より 極小値 $f(0)= -5$

$x=-4$ のとき，$f''(-4)>0$ より 極大値 $f(-4)= 27$

問題①　$f(x)= x^3 - 3x + 2$

例題②　$f(x)= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f''(x)=6x-6$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1$，$f''(1)=0$

$f'(x)\geqq 0$ より　$f(1)$ は極値でない。

問題②　$f(x)= x^3 + 6x^2 + 12x$

3． 次の関数の極値を求めよ。
Find the extremum of the following function.

例題　関数 $f(x)=|x|e^{-x^2}$ の極値を求めよ。

$x>0$ のとき　$f(x)= x\,e^{-x^2}$

$x>0$ において　$f'(x)=(1-2x^2)e^{-x^2}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$f'(x)=0$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e}$

$x<0$ のとき　$f(x)=-x\,e^{-x^2}$

$x<0$ において　$f'(x)=(2x^2-1)e^{-x^2}$

$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$f'(x)=0$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e}$

$x=0$ のとき　$f(x)=0$

$f(x)$ は極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e}$ $\left(x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

極小値 0 $(x=0)$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}\,e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}\,e}$	↘

問題　関数 $f(x)=|x|e^{-x}$ の極値を求めよ。

x					
$f'(x)$					
$f(x)$					