数学Ⅲ　平均値の定理 ①　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の関数に，平均値の定理を適用するとき，c の値を求めよ。

Find the value of c when applying the mean value theorem to the following function.

例題　$y = x^2 - 1$　$[-1, 3]$

関数 $f(x) = x^2 - 1$ は

閉区間 $[-1, 3]$ で連続，開区間 $(-1, 3)$ で微分可能
continuous　differentiable

$f'(x) = 2x$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = f'(c)$$　$-1 < c < 3$ を満たす c が存在する。
exist

$$\frac{8 - 0}{3 - (-1)} = 2 = 2c$$　よって　$c = 1$

問題　$y = \sqrt{x}$　$[1, 9]$

2. 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

Prove the following using the mean value theorem.

例題　$0 < a < b$ のとき　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$

関数 $f(x) = \log x$ は $x > 0$ で微分可能，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

区間 $[a, b]$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

$a < c < b$ となる実数 c が存在する。

$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ より　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b - a} < \dfrac{1}{a}$

問題　$x > 0$ のとき　$\log(x + 1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

3. 次の極限値を求めよ。

Find the next limit value.

例題　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

関数 $f(x) = e^x$ は微分可能であり，$f'(x) = e^x$
differentiable

平均値の定理より　$\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^c$
the mean value theorem

$x < c < \sin x$　または　$\sin x < c < x$　となる

実数 c が存在する。

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \sin x = 0$，$\displaystyle \lim_{x \to 0} x = 0$　より　$\displaystyle \lim_{x \to 0} c = 0$

したがって　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} e^c = e^0 = 1$

問題①　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$

問題②　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$

数学Ⅲ　平均値の定理 ② 課題　　（　）年（　）組（　）番（　　　　）

1. 次の関数に，平均値の定理を適用するとき，c の値を求めよ。

Find the value of c when applying the mean value theorem to the following function.

例題　$y = x^3$　$[-1, 2]$

関数 $f(x) = x^3$ は　区間 $[-1, 2]$ で連続，

区間 $(-1, 2)$ で微分可能 $f'(x) = 3x^2$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = f'(c),\ -1 < c < 2$$ を満たす c が存在する。

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = 3 = 3c^2,\quad c^2 = 1$$ より　$c = \pm 1$

$-1 < c < 2$　であるので，$c = 1$　になる。

問題　$y = x^2 + 2x$　$[1, 3]$

2. 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

Prove the following using the mean value theorem.

例題　$a < b$ のとき，$e^b - e^a < b - a$

関数 $f(x) = e^x$ は $x > 0$ で微分可能，$f'(x) = e^x$

区間 $[a, b]$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^c$$

$a < c < b$ となる実数 c が存在し，$e^c > 1$ より

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} > 1,\quad e^b - e^a < b - a$$　Q.E.D

問題　$x > 0$ のとき，$1 < \dfrac{e^x - 1}{x} < e^x$

3. 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

Prove the following using the mean value theorem.

例題	問題
$\lvert \sin a - \sin b \rvert \leqq \lvert a - b \rvert$	$\lvert \cos a - \cos b \rvert \leqq \lvert a - b \rvert$
$f(x) = \sin x$　とすると $f(x)$ はすべての実数で微分可能である。 $f'(x) = \cos x$ になる。 $a < b$ のとき　$[a, b]$ で平均値の定理を用いる。 $\dfrac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c$ となる c が　$a < c < b$ に存在する。 $\lvert \cos c \rvert \leqq 1$　より $\left\lvert \dfrac{\sin b - \sin a}{b - a} \right\rvert \leqq 1$ よって $\lvert \sin a - \sin b \rvert \leqq \lvert a - b \rvert$ $a > b$ のときも成り立つ。 $a = b$ のとき $\sin a - \sin b = 0$ $b - a = 0$　より $\lvert \sin a - \sin b \rvert = \lvert a - b \rvert$ であるから $\lvert \sin a - \sin b \rvert \leqq \lvert a - b \rvert$ が成り立つ。 $a < b,\ a = b,\ a > b$ のときに成り立つので $\lvert \sin a - \sin b \rvert \leqq \lvert a - b \rvert$ は成り立つ。	

数学Ⅲ　平均値の定理 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1． 次の関数に，平均値の定理を適用するとき，c の値を求めよ。

Find the value of c when applying the mean value theorem to the following function.

例題　$y = \log x \quad [\,1\,,\,e\,]$

関数 $f(x) = \log x$ は閉区間 $[\,1\,,\,e\,]$ で連続，

開区間 $(\,1\,,\,e\,)$ で微分可能，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = f'(c)$$

$1 < c < e$ を満たす c が存在する。

$\dfrac{1-0}{e-1} = \dfrac{1}{c}$　よって　$c = e-1$

問題　$y = x^2 \quad [\,1\,,\,4\,]$

2． 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

Prove the following using the mean value theorem.

例題　$0 < a < b$ のとき　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$

関数 $f(x) = \log x$ は $x > 0$ で微分可能，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

区間 $[a,\,b]$ に平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b - \log a}{b-a} = \frac{1}{c}$$

$a < c < b$ となる実数 c が存在する。

$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ より　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{\log b - \log a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$

問題　$x > 0$ のとき　$\log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

3． 次の極限値を求めよ。

Find the next limit.

例題　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2}$

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2}$ を求める。

関数 $f(x) = \cos x$ は閉区間 $[\,x^2\,,\,x\,]$ で連続であり，

開区間 $(\,x^2\,,\,x\,)$ で微分可能であり，$f'(x) = -\sin x$

平均値の定理より　$\dfrac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = -\sin c$

$0 < x^2 < c < x$ を満たす実数 c が存在する。

$\displaystyle\lim_{x\to +0} x^2 = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to +0} x = 0$　より　$\displaystyle\lim_{x\to +0} c = 0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} (-\sin c) = 0$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2}$ を求める。

$-1 < x < 0$ として閉区間 $[\,x,\,x^2\,]$ に平均値の定理

を用いると，同様にして $\displaystyle\lim_{x\to -0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = 0$

(1),(2) より　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = 0$

問題　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$