

1. 点 A における接線と法線の方程式を求めよ。  
Find the equations of the tangent and normal at point A.
2. 次のような接線の方程式を求めよ。  
Find the equation of the tangent line as shown below.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div>例題①</div> <div><math>y = \frac{4}{(x-1)^2}</math>      A(3, 1)</div> <div><math>y' = -\frac{8}{(x-1)^3}</math>    接線の傾きは <math>-\frac{8}{(3-1)^3} = -1</math></div> <div>点 A における接線の方程式は</div> <div><math>y - 1 = -(x - 3)</math> ,    <math>y = -x + 4</math></div> <div>点 A における法線の方程式は</div> <div><math>y - 1 = 1 (x - 3)</math> ,    <math>y = x - 2</math></div>                                                                                                                                                                                                       | <div>例題①</div> <div>曲線 <math>y = e^{-x}</math> の接線で傾きが <math>-1</math><br/>tangent line    slope</div> <div><math>y' = -e^{-x}</math>    接点の座標を <math>(a, e^{-a})</math> とすると</div> <div>接線の傾きが <math>-1</math> であるから <math>-e^{-a} = -1</math></div> <div>よって <math>a = 0</math> ,    <math>e^{-0} = 1</math> であるから</div> <div>求める接線の方程式は</div> <div><math>y - 1 = -1 (x - 0)</math>    すなわち <math>y = -x + 1</math></div>                                            |
| <div>問題①</div> <div><math>y = \frac{4}{x}</math>      A(1, 4)</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div>問題①</div> <div>曲線 <math>y = e^x</math> の接線で傾きが 1</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <div>例題②</div> <div><math>\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1</math>      A(3, 2)</div> <div><math>\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1</math> の両辺を <math>x</math> で微分すると</div> <div><math>\frac{2x}{3} - \frac{2yy'}{2} = 0</math> ,    <math>y \neq 0</math> のとき <math>y' = \frac{2x}{3y}</math></div> <div>点 A における接線の傾きは <math>\frac{2 \times 3}{3 \times 2} = 1</math></div> <div>点 A における接線の方程式は</div> <div><math>y - 2 = 1 (x - 3)</math> ,    <math>y = x - 1</math></div> <div>点 A における法線の方程式は</div> <div><math>y - 2 = -1 (x - 3)</math> ,    <math>y = -x + 5</math></div> | <div>例題②</div> <div>曲線 <math>y = e^x</math> の接線で原点を通る<br/>tangent line    origin    trough</div> <div><math>x</math> で微分すると <math>y' = e^x</math></div> <div>接点の座標を <math>(a, e^a)</math> とすると</div> <div><math>y - e^a = e^a (x - a)</math></div> <div>原点を通るから <math>0 - e^a = e^a (0 - a)</math></div> <div>よって <math>a = 1</math> ,    <math>e^1 = e</math> であるから</div> <div>求める接線の方程式は</div> <div><math>y - e = e (x - 1)</math>    すなわち <math>y = ex</math></div> |
| <div>問題②</div> <div><math>\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1</math>      A(4, 3)</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <div>問題②</div> <div>曲線 <math>y = e^{-x}</math> の接線で原点を通る</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

1. 次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。  
Find the equations of the tangent and normal at point A.
2. 次のような接線の方程式を求めよ。  
Find the equation of the tangent line as shown below.

例題①

$y = \frac{2}{x}$

A( 1 , 2 )

$y' = -\frac{2}{x^2}$

点 A における接線の傾きは  $-\frac{2}{1^2} = -2$

点 A における接線の方程式は

$y - 2 = -2(x - 1), \quad y = -2x + 4$

点 A における法線の方程式は

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1), \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

問題①

$y = \frac{4}{x^2}$

A( 2 , 1 )

例題②

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

A( 1 , -2 )

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$  の両辺を  $x$  で微分すると

$\frac{2x}{2} + \frac{2yy'}{8} = 0, \quad y \neq 0$  のとき  $y' = -\frac{4x}{y}$

点 A における接線の傾きは  $-\frac{4 \times 1}{-2} = 2$

点 A における接線の方程式は

$y - (-2) = 2(x - 1)$  すなわち  $y = 2x - 4$

点 A における法線の方程式は

$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 1), \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

問題②

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

A( 1 , 2 )

例題

$y = \sqrt{x - 1}$  の接線で ( 0 , 0 ) を通る。

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

接点の座標を ( a ,  $\sqrt{a - 1}$  ) とすると

接線の方程式は

$y - \sqrt{a - 1} = \frac{1}{2\sqrt{a - 1}}(x - a)$

( 0 , 0 ) を通るから

$-\sqrt{a - 1} = \frac{1}{2\sqrt{a - 1}}(-a)$

$a - 1 = \frac{1}{2}a, \quad a = 2$

接線の方程式は

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2), \quad y = \frac{1}{2}x$

問題①

$y = \frac{2}{x}$  の接線で ( 0 , 4 ) を通る。

問題②

$y = \frac{4}{x^2}$  の接線で ( 0 , 3 ) を通る。

1. 次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。  
Find the equations of the tangent and normal at point A.
2. 次のような接線の方程式を求めよ。  
Find the equation of the tangent line as shown below.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div>れいだい<br/>例題①</div> <div><math>y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}</math><span style="float:right">A( 2 , 1 )</span></div> <div><math>y' = - \frac{1}{2 (x-1) \sqrt{x-1}}</math></div> <div>てん<br/>点 A における接線の傾きは <math>-\frac{1}{2}</math></div> <div>てん<br/>点 A における接線の方程式は</div> <div><math>y-1 = -\frac{1}{2}(x-2), \quad y = -\frac{1}{2}x + 2</math></div> <div>てん<br/>点 A における法線の方程式は</div> <div><math>y-1 = 2(x-2), \quad y = 2x - 3</math></div> | <div>れいだい<br/>例題</div> <div><math>y = \sqrt{2x+1}</math> の接線で <math>(-5, 0)</math> を通る。</div> <div><math>y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}</math></div> <div>せつてん ざひょう<br/>接点の座標を <math>(a, \sqrt{2a+1})</math> とすると</div> <div>せつせん ほうていしき<br/>接線の方程式は</div> <div><math>y - \sqrt{2a+1} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}(x-a)</math></div> <div><math>(-5, 0)</math> を通るから</div> <div><math>-\sqrt{2a+1} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}(-5-a)</math></div> <div><math>-(2a+1) = (-5-a), \quad a = 4</math></div> <div>せつせんのほうていしき<br/>接線の方程式は</div> <div><math>y-3 = \frac{1}{3}(x-4), \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}</math></div> |
| <div>もんだい<br/>問題①</div> <div><math>y = \sqrt{2x+1}</math><span style="float:right">A( 4 , 2 )</span></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <div>もんだい<br/>問題①</div> <div><math>y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}</math> の接線で <math>(0, 2)</math> を通る。</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <div>れいだい<br/>例題②</div> <div><math>y = x \log x</math><span style="float:right">A( 1 , 0 )</span></div> <div><math>y' = (x)' \log x + x (\log x)' = \log x + 1</math></div> <div>てん<br/>点 A における接線の傾きは <math>\log 1 + 1 = 1</math></div> <div>てん<br/>点 A における接線の方程式は</div> <div><math>y-0 = 1(x-1), \quad y = x-1</math></div> <div>てん<br/>点 A における法線の方程式は</div> <div><math>y-0 = -1(x-1), \quad y = -x+1</math></div>                             | <div>もんだい<br/>問題②</div> <div><math>y = \log x + 1</math> の接線で <math>(0, 0)</math> を通る。</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

1. 次の2つの式が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent

例題

$y = -x^3$  と  $y = \frac{1}{x}$

$y = -x^3$  上の点  $(s, -s^3)$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y + s^3 = -3s^2(x - s)$

$y = -3s^2x + 2s^3 \qquad \cdots \textcircled{1}$

$y = \frac{1}{x}$  の上の点  $(t, \frac{1}{t})$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t)$

$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \qquad \cdots \textcircled{2}$

①, ②の式は一致するから ※  $s \neq 0$

$-3s^2 = -\frac{1}{t^2}, 2s^3 = \frac{2}{t}$

$\frac{1}{t} = s^3$  より  $-3s^2 = s^6$

$s^6 - 3s^2 = s^2(s^4 - 3) = 0$  より  $s = \pm \sqrt[4]{3}$

共通接線の方程式は  $y = -3\sqrt{3}x \pm 2\sqrt[4]{3}$

問題

$y = x^2$  と  $y = \frac{1}{x}$

2. 次の2つの式が共有点で共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent

例題

$y = ax^2$  と  $y = 2\log x$

共有点の  $x$  座標を  $p$  とする。

接線の傾きより  $2ap = \frac{2}{p}, ap^2 = 1$

$y$  座標より  $ap^2 = 2\log p$

$1 = 2\log p = \log p^2, p^2 = e$

$p > 0$  であるから  $p = \sqrt{e}$

$y$  座標は  $y = 2\log \sqrt{e} = \log e = 1$

共通接線の方程式は

$y - 1 = \frac{2}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e})$

$y = \frac{2}{\sqrt{e}}x - 1$

問題

$y = ax^3$  と  $y = 3\log x$

1. 次の2つの式が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent
2. 次の2つの式が共有点で共通接線をもつとき、定数  $k$  の値を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent

れいだい  
例題

$y = e^{2x}$  と  $y = -\frac{1}{e^{2x}}$

$y = e^{2x}$  上の点  $(s, e^{2s})$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y - e^{2s} = 2 e^{2s} (x - s)$   
 $y = 2 e^{2s} x - e^{2s} (2 s - 1)$        $\cdots$ ①

$y = -\frac{1}{e^{2x}}$  の上の点  $(t, -\frac{1}{e^{2t}})$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y + \frac{1}{e^{2t}} = \frac{2}{e^{2t}} (x - t)$   
 $y = \frac{2}{e^{2t}} x - \frac{2 t + 1}{e^{2t}}$        $\cdots$ ②

①,②の式は一致するから  
 $e^{2s} = \frac{1}{e^{2t}}$  ,  $-e^{2s} (2 s - 1) = \frac{2 t + 1}{e^{2t}}$   
 $s = -t$  ,  $2 s - 1 = 2 t + 1$  より  $s = \frac{1}{2}$   
共通接線の方程式は  $y = 2 e x$

もんだい  
問題

$y = e^x$  と  $y = -\frac{1}{e^x}$

れいだい  
例題

$y = e^x$  と  $y = k \sqrt{x}$

共通点の  $x$  座標を  $p$  とする。

接線の傾きより  $e^p = \frac{k}{2 \sqrt{p}}$   
 $y$  座標より  $e^p = k \sqrt{p}$

よって,  $\frac{k}{2 \sqrt{p}} = k \sqrt{p} \quad \therefore p = \frac{1}{2}$   
 $k = \frac{e^p}{\sqrt{p}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}}$

接線の方程式は  
 $y - e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})$   
 $y = e^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}$

もんだい  
問題

$y = e^x$  と  $y = k x \sqrt{x}$

1. 次の2つの式が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent
2. 次の2つの式が共有点で共通接線をもつとき、定数  $a$  の値を求めよ。

The following two equations have a common tangent, find the equation of common tangent

例題

$y = x^3$  と  $y = x\sqrt{x}$  が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

$y = x^3$  上の点  $(x, s^3)$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y - s^3 = 3s^2(x - s)$

$y = 3s^2x - 2s^3 \qquad \cdots \textcircled{1}$

$y = x\sqrt{x}$  の上の点  $(t, t\sqrt{t})$  の接線を求める。

接線の方程式は  $y - t\sqrt{t} = \frac{3\sqrt{t}}{2}(x - t)$

$y = \frac{3\sqrt{t}}{2}x - \frac{t\sqrt{t}}{2} \qquad \cdots \textcircled{2}$

①, ②の式は一致するから

$3s^2 = \frac{3\sqrt{t}}{2}, \quad -2s^3 = -\frac{t\sqrt{t}}{2}$

$s = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t = 2\frac{3}{2}$

共通接線の方程式は  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}x - 1$

問題

$y = -x^2$  と  $y = \sqrt{x}$  が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

例題

$y = \frac{x^2}{16}$  と  $y = \sqrt{x+a}$  が共有点を持ち、その点における接線が一致しているとき、定数  $a$  の値を求めよ。

共通点の  $x$  座標を  $p$  とする。

接線の傾きより  $\frac{p}{8} = \frac{1}{2\sqrt{p+a}}$

$y$  座標より  $\frac{p^2}{16} = \sqrt{p+a}$

よって、 $\sqrt{p+a} = \frac{4}{p} = \frac{p^2}{16}$

$p^3 = 64, p = 4$

$\sqrt{4+a} = \frac{4^2}{16} = 1 \quad \therefore a = -3$

接線の方程式は  $y = \frac{1}{2}x - 1$

問題

$y = \frac{x^2}{2}$  と  $y = \sqrt{x+a}$  が共有点を持ち、その点における接線が一致しているとき、定数  $a$  の値を求めよ。

