数学Ⅲ　接線と法線の方程式 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

Find the equations of the tangent and normal at point A.

例題①　$y=\dfrac{4}{(x-1)^2}$　　A(3 , 1)

$y'=-\dfrac{8}{(x-1)^3}$　接線の傾きは $-\dfrac{8}{(3-1)^3}=-1$

点 A における接線の方程式は

$y-1=-(x-3)$,　$y=-x+4$

点 A における法線の方程式は

$y-1=1(x-3)$,　$y=x-2$

問題①　$y=\dfrac{4}{x}$　　A(1 , 4)

例題②　$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　A(3 , 2)

$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2yy'}{2}=0$,　$y\neq 0$ のとき　$y'=\dfrac{2x}{3y}$

点 A における接線の傾きは　$\dfrac{2\times 3}{3\times 2}=1$

点 A における接線の方程式は

$y-2=1(x-3)$,　$y=x-1$

点 A における法線の方程式は

$y-2=-1(x-3)$,　$y=-x+5$

問題②　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　A(4 , 3)

2．次のような接線の方程式を求めよ。

Find the equation of the tangent line as shown below.

例題①　曲線 $y=e^{-x}$ の接線で傾きが -1

tangent line　slope

$y'=-e^{-x}$　　接点の座標を(a , e^{-a})とすると

接線の傾きが -1 であるから　$-e^{-a}=-1$

よって $a=0$,　$e^{-0}=1$　であるから

求める接線の方程式は

$y-1=-1(x-0)$　すなわち　$y=-x+1$

問題①　曲線 $y=e^{x}$ の接線で傾きが 1

例題②　曲線 $y=e^{x}$ の接線で原点を通る

tangent line　origin　trough

x で微分すると　$y'=e^{x}$

接点の座標を(a , e^{a})とすると

$y-e^{a}=e^{a}(x-a)$

原点を通るから　$0-e^{a}=e^{a}(0-a)$

よって $a=1$,　$e^{1}=e$　であるから

求める接線の方程式は

$y-e=e(x-1)$　すなわち　$y=ex$

問題②　曲線 $y=e^{-x}$ の接線で原点を通る

数学Ⅲ　接線と法線の方程式 ② 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　　)

1．次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

例題①　$y = \dfrac{2}{x}$　　A(1 , 2)

$y' = -\dfrac{2}{x^2}$

点 A における接線の傾きは　$-\dfrac{2}{1^2} = -2$

点 A における接線の方程式は

$y - 2 = -2(x - 1)$,　$y = -2x + 4$

点 A における法線の方程式は

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$,　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

問題①　$y = \dfrac{4}{x^2}$　　A(2 , 1)

例題②　$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$　　A(1 , −2)

$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{2x}{2} + \dfrac{2yy'}{8} = 0$,　$y \neq 0$ のとき $y' = -\dfrac{4x}{y}$

点 A における接線の傾きは　$-\dfrac{4 \times 1}{-2} = 2$

点 A における接線の方程式は

$y - (-2) = 2(x - 1)$　すなわち　$y = 2x - 4$

点 A における法線の方程式は

$y - (-2) = \dfrac{1}{2}(x - 1)$,　$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$

問題②　$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1$　　A(1 , 2)

2．次のような接線の方程式を求めよ。

例題　$y = \sqrt{x - 1}$ の接線で $(0, 0)$ を通る。

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

接点の座標を $\left(a, \sqrt{a - 1}\right)$ とすると

接線の方程式は

$y - \sqrt{a - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{a - 1}}(x - a)$

$(0, 0)$ を通るから

$-\sqrt{a - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{a - 1}}(-a)$

$a - 1 = \dfrac{1}{2}a$,　$a = 2$

接線の方程式は

$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 2)$,　$y = \dfrac{1}{2}x$

問題①　$y = \dfrac{2}{x}$ の接線で $(0, 4)$ を通る。

問題②　$y = \dfrac{4}{x^2}$ の接線で $(0, 3)$ を通る。

数学Ⅲ　接線と法線の方程式 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

例題①　$y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$　　A(2 , 1)

$y' = -\dfrac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

点 A における接線の傾きは　$-\dfrac{1}{2}$

点 A における接線の方程式は

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$,　$y = -\dfrac{1}{2}x + 2$

点 A における法線の方程式は

$y - 1 = 2(x-2)$,　$y = 2x - 3$

問題①　$y = \sqrt{2x+1}$　　A(4 , 2)

例題②　$y = x \log x$　　A(1 , 0)

$y' = (x)' \log x + x(\log x)' = \log x + 1$

点 A における接線の傾きは　$\log 1 + 1 = 1$

点 A における接線の方程式は

$y - 0 = 1(x-1)$,　$y = x - 1$

点 A における法線の方程式は

$y - 0 = -1(x-1)$,　$y = -x + 1$

問題②　$y = \log x + 1$　　A(1 , 1)

2．次のような接線の方程式を求めよ。

例題　$y = \sqrt{2x+1}$ の接線で $(-5, 0)$ を通る。

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

接点の座標を $(a, \sqrt{2a+1})$ とすると

接線の方程式は

$y - \sqrt{2a+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}(x-a)$

$(-5, 0)$ を通るから

$-\sqrt{2a+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2a+1}}(-5-a)$

$-(2a+1) = (-5-a)$,　$a = 4$

接線の方程式は

$y - 3 = \dfrac{1}{3}(x-4)$,　$y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

問題①　$y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ の接線で $(0, 2)$ を通る。

問題②　$y = \log x + 1$ の接線で $(0, 0)$ を通る。

数学Ⅲ　接線の方程式(共通接線) ① 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の 2 つの式が共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

例題　$y = -x^3$ と $y = \dfrac{1}{x}$

$y = -x^3$ 上の点$(s, -s^3)$の接線を求める。

接線の方程式は　$y + s^3 = -3s^2(x - s)$

$y = -3s^2 x + 2s^3$　　　・・・①

$y = \dfrac{1}{x}$ の上の点$\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$の接線を求める。

接線の方程式は $y - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t^2}(x - t)$

$y = -\dfrac{1}{t^2}x + \dfrac{2}{t}$　　　・・・②

①,②の式は一致するから　　※ $s \neq 0$

$-3s^2 = -\dfrac{1}{t^2}$, $2s^3 = \dfrac{2}{t}$

$\dfrac{1}{t} = s^3$ より　$-3s^2 = s^6$

$s^6 - 3s^2 = s^2(s^4 - 3) = 0$ より　$s = \pm\sqrt[4]{3}$

共通接線の方程式は $y = -3\sqrt{3}\ x \pm 2\sqrt[4]{3^3}$

問題　$y = x^2$ と $y = \dfrac{1}{x}$

2．次の 2 つの式が共有点で共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

例題　$y = ax^2$ と $y = 2\log x$

共有点の x 座標を p とする。

接線の傾きより　$2ap = \dfrac{2}{p}$，$ap^2 = 1$

y 座標より　　$ap^2 = 2\log p$

$1 = 2\log p = \log p^2$　，$p^2 = e$

$p > 0$ であるから　$p = \sqrt{e}$

y 座標は $y = 2\log\sqrt{e} = \log e = 1$

共通接線の方程式は

$y - 1 = \dfrac{2}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e})$

$y = \dfrac{2}{\sqrt{e}}x - 1$

問題　$y = ax^3$ と $y = 3\log x$

数学Ⅲ　接線の方程式(共通接線) ② 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の 2 つの式が共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

例題　$y = e^{2x}$ と $y = -\frac{1}{e^{2x}}$

$y = e^{2x}$ 上の点(s, e^{2s})の接線を求める。

接線の方程式は　$y - e^{2s} = 2e^{2s}(x - s)$

$y = 2e^{2s}x - e^{2s}(2s - 1)$　　・・・①

$y = -\frac{1}{e^{2x}}$ の上の点$\left(t, -\frac{1}{e^{2t}}\right)$の接線を求める。

接線の方程式は $y + \frac{1}{e^{2t}} = \frac{2}{e^{2t}}(x - t)$

$y = \frac{2}{e^{2t}}x - \frac{2t + 1}{e^{2t}}$　　・・・②

①,②の式は一致するから

$e^{2s} = \frac{1}{e^{2t}}$　, $-e^{2s}(2s - 1) = \frac{2t + 1}{e^{2t}}$

$s = -t$， $2s - 1 = 2t + 1$ より $s = \frac{1}{2}$

共通接線の方程式は $y = 2ex$

問題　$y = e^{x}$ と $y = -\frac{1}{e^{x}}$

2．次の 2 つの式が共有点で共通接線をもつとき，定数 k の値を求めよ。

例題　$y = e^{x}$ と $y = k\sqrt{x}$

共通点の x 座標を p とする。

接線の傾きより　$e^{p} = \frac{k}{2\sqrt{p}}$

y 座標より　$e^{p} = k\sqrt{p}$

よって，$\frac{k}{2\sqrt{p}} = k\sqrt{p}$　∴ $p = \frac{1}{2}$

$k = \frac{e^{p}}{\sqrt{p}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{2}}$

接線の方程式は

$y - e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y = e^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$

問題　$y = e^{x}$ と $y = kx\sqrt{x}$

数学Ⅲ　接線の方程式(共通接線) ③ 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の 2 つの式が共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

例題　$y = x^3$ と $y = x\sqrt{x}$ が共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

$y = x^3$ 上の点(x, s^3)の接線を求める。

接線の方程式は　$y - s^3 = 3s^2(x - s)$

$y = 3s^2 x - 2s^3$　　　…①

$y = x\sqrt{x}$ の上の点$(t, t\sqrt{t})$の接線を求める。

接線の方程式は $y - t\sqrt{t} = \dfrac{3\sqrt{t}}{2}(x - t)$

$y = \dfrac{3\sqrt{t}}{2}x - \dfrac{t\sqrt{t}}{2}$　　　…②

①,②の式は一致するから

$3s^2 = \dfrac{3\sqrt{t}}{2}$，$-2s^3 = -\dfrac{t\sqrt{t}}{2}$

$s = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$t = 2^{\frac{3}{2}}$

共通接線の方程式は $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}x - 1$

問題　$y = -x^2$ と $y = \sqrt{x}$ が共通接線をもつとき，その共通接線の方程式を求めよ。

2．次の 2 つの式が共有点で共通接線をもつとき，定数 a の値を求めよ。

例題　$y = \dfrac{x^2}{16}$ と $y = \sqrt{x + a}$ が共有点を持ち，その点における接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。

共通点の x 座標を p とする。

接線の傾きより　$\dfrac{p}{8} = \dfrac{1}{2\sqrt{p + a}}$

y 座標より　$\dfrac{p^2}{16} = \sqrt{p + a}$

よって，$\sqrt{p + a} = \dfrac{4}{p} = \dfrac{p^2}{16}$

$p^3 = 64$，$p = 4$

$\sqrt{4 + a} = \dfrac{4^2}{16} = 1$　$\therefore a = -3$

接線の方程式は $y = \dfrac{1}{2}x - 1$

問題　$y = \dfrac{x^2}{2}$ と $y = \sqrt{x + a}$ が共有点を持ち，その点における接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。