

1. 次の関数について、第1次導関数から第3次導関数を求めよ。
Find the third derivative from the first derivative of the following function.

れい だい 例題	もん だい 問題
① $y = \log 2 x$ $y' = \frac{1}{x}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}$ $y''' = \frac{2}{x^3}$	① $y = x \log x - x$
② $y = \cos 2 x$ $y' = -2 \sin 2 x$ $y'' = -4 \cos 2 x$ $y''' = 8 \sin 2 x$	② $y = \sin 2 x$
③ $y = e^2 x$ $y' = 2 e^2 x$ $y'' = 4 e^2 x$ $y''' = 8 e^2 x$	③ $y = e^{-x}$

2. 次の関数の第n次導関数を求めよ。
Find the n-th derivative of the following function.

れい だい 例題① $y = \cos 2 x$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ より $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2 x + \frac{n}{2} \pi\right)$
もん だい 問題① $y = \sin 2 x$
れい だい 例題② $y = e^2 x$ $y^{(n)} = 2^n e^2 x$
もん だい 問題② $y = e^{-x}$

3. 次の陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。
Find the derivative $\frac{dy}{dx}$ of the following implicit function.

れい だい 例題	もん だい 問題
① $y^2 = -8 x$ りょうへん 両 辺を x で微分して $2 y \frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y}$	① $y^2 = 6 x$
② $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ りょうへん 両 辺を x で微分して $\frac{2 x}{16} + \frac{2 y}{9} \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{9 x}{16 y}$	② $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

4. 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき、
 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。
Express $\frac{dy}{dx}$ as a function of t when the parametric representation of the curve is given by the following equation,

れい だい 例題	もん だい 問題
① $x = t^2, y = 2 t + 1$ $\frac{dx}{dt} = 2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2 t} = \frac{1}{t}$	① $x = 2 t^3, y = 3 t^2 + 1$
② $x = \cos 2 t, y = \sin t$ $\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2 t$ $\frac{dy}{dt} = \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-2 \sin 2 t} = -\frac{\cos t}{4 \sin t \cos t} = -\frac{1}{4 \sin t}$	② $x = \cos 2 t, y = \sin 2 t$

1. 次の関数について、第1次導関数から第3次導関数を求めよ。 a は0でない定数とする。

Find the third derivative from the first derivative of the following function.

れい だい 例題	もん だい 問題
① $y = \frac{a}{x} = a x^{-1}$ $y' = - \frac{a}{x^2}$ $y'' = \frac{2}{x^3} a$ $y''' = - \frac{6}{x^4} a$	① $y = a x^3$
② $y = \sin a x$ $y' = a \cos a x$ $y'' = -a^2 \sin a x$ $y''' = -a^3 \cos a x$	② $y = \cos a x$

2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

Find the n -th derivative of the following function.

れい だい 例題
$y = x e^{-x}$ $y' = (x)' e^{-x} + x (e^{-x})'$ $\qquad = e^{-x} - x e^{-x} = -(x-1) e^{-x}$ $y'' = (-x+1)' e^{-x} + (-x+1) (e^{-x})'$ $\qquad = -e^{-x} - (-x+1) e^{-x} = (x-2) e^{-x}$ $y''' = (x-2)' e^{-x} + (x-2) (e^{-x})'$ $\qquad = e^{-x} - (x-2) e^{-x} = -(x-3) e^{-x}$ よって $y^{(n)} = (-1)^n (x-n) e^{-x}$
もん だい 問題
$y = x e^x$

3. 次の陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

Find the derivative $\frac{dy}{dx}$ of the following implicit function.

れい だい 例題	もん だい 問題
① $y^2 = 4 x$ 両 辺を x で微分して $2 y \frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$	① $y^2 = -x$
② $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 両 辺を x で微分して $\frac{2}{4} x - \frac{2}{9} y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4} \frac{x}{y}$	② $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

4. 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

Express $\frac{dy}{dx}$ as a function of t when the parametric representation of the curve is given by the following equation,

れい だい 例題	もん だい 問題
① $x = t^2 + 1, y = 2 t$ $\frac{dx}{dt} = 2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ $\qquad = \frac{2}{2} = t$	① $x = 6 t^2 + 1, y = 4 t^3$
② $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ $\frac{dx}{dt} = -2 \cos t \sin t$ $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin t \cos t}{-2 \cos t \sin t}$ $\qquad = -1$	② $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$

1. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。
Find the n -th derivative of the following function.
2. 次の関数を割った余りを指定した関数で表せ。
Express the remainder when dividing the following function using the specified function.

れい だい
例題 $y = x^2 e^{-x}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' \\ &= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= (-x^2 + 2x) e^{-x} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y'' &= (-x^2 + 2x)' e^{-x} + (-x^2 + 2x) (e^{-x})' \\ &= (-2x + 2) e^{-x} - (-x^2 + 2x) e^{-x} \\ &= (x^2 - 4x + 2) e^{-x} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y''' &= (x^2 - 4x + 2)' e^{-x} + (x^2 - 4x + 2) (e^{-x})' \\ &= (2x - 4) e^{-x} - (x^2 - 4x + 2) e^{-x} \\ &= (-x^2 + 6x - 6) e^{-x} \end{aligned}$$
$$y^{(n)} = (-1)^n \{ x^2 - 2nx + n(n-1) \}$$

※ $2, 4, 6, \dots$ の数列は $a_n = 2n$
 $0, 2, 6, \dots$ の数列は $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n$
となる階差数列 $a_n = n(n-1)$

もん だい
問題 $y = x^2 e^x$

れい だい
例題 関数 $f(x)$ を $(x-k)^3$ で割ったときの余りを $f(k), f'(k), f''(k)$ を用いて表せ。

$$\begin{aligned} f(x) &\text{を } (x-k)^3 \text{ で割った商を } Q(x) \text{ とすると} \\ f(x) &= (x-k)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c \text{ とおける。} \\ f'(x) &= 3(x-k)^2 Q(x) + (x-k)^3 Q'(x) + 2ax + b \\ f''(x) &= 6(x-k) Q(x) + 3(x-k)^2 Q'(x) \\ &\quad + 3(x-k)^2 Q'(x) + (x-k)^3 Q''(x) + 2a \\ f''(k) &= 2a \text{ より } a = \frac{f''(k)}{2} \\ f'(k) &= 2ak + b \text{ より } b = f'(k) - f''(k)k \\ f(k) &= ak^2 + bk + c \text{ より} \\ c &= f(k) - \frac{f''(k)}{2}k^2 - \{f'(k) - f''(k)k\}k \\ \text{関数 } f(x) &\text{を } (x-k)^3 \text{ で割ったときの余りは} \\ &\frac{f''(k)}{2}x^2 + \{f'(k) - f''(k)k\}x \\ &\quad + f(k) + \frac{f''(k)}{2}k^2 - f'(k)k \end{aligned}$$

もん だい
問題 関数 $f(x)$ を $(x-k)^2$ で割ったときの余りを $f(k), f'(k)$ を用いて表せ。

