数学Ⅲ n次導関数数 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の関数について，第 1 次導関数から第 3 次導関数を求めよ。

Find the third derivative from the first derivative of the following function.

例題	問題
① $y = \log 2x$ $y' = \dfrac{1}{x}$ $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$ $y''' = \dfrac{2}{x^3}$	① $y = x\log x - x$
② $y = \cos 2x$ $y' = -2\sin 2x$ $y'' = -4\cos 2x$ $y''' = 8\sin 2x$	② $y = \sin 2x$
③ $y = e^{2x}$ $y' = 2e^{2x}$ $y'' = 4e^{2x}$ $y''' = 8e^{2x}$	③ $y = e^{-x}$

2．次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

Find the nth derivative of the following function.

例題① $y = \cos 2x$ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$,　$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ より $y^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$
問題① $y = \sin 2x$
例題② $y = e^{2x}$ $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$
問題② $y = e^{-x}$

3．次の陰関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

Find the derivative $\dfrac{dy}{dx}$ of the following implicit function.

例題	問題
① $y^2 = -8x$ 両辺を x で微分して $2y\dfrac{dy}{dx} = -8$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4}{y}$	① $y^2 = 6x$
② $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 両辺を x で微分して $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2y}{9}\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{9x}{16y}$	② $\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

4．曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

Express $\dfrac{dy}{dx}$ as a function of t when the parametric representation of the curve is given by the following equation,

例題	問題
① $x = t^2$，$y = 2t + 1$ $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ ，$\dfrac{dy}{dt} = 2$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ $= \dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$	① $x = 2t^3$，$y = 3t^2 + 1$
② $x = \cos 2t$, $y = \sin t$ $\dfrac{dx}{dt} = -2\sin 2t$ $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{-2\sin 2t}$ $= -\dfrac{\cos t}{4\sin t\cos t}$ $= -\dfrac{1}{4\sin t}$	② $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$

数学Ⅲ　n次導関数 ② 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の関数について，第 1 次導関数から第 3 次導関数を求めよ。a は 0 でない定数とする。

例題	問題
① $y = \frac{a}{x} = a\,x^{-1}$ $y' = -\frac{a}{x^2}$ $y'' = \frac{2a}{x^3}$ $y''' = -\frac{6a}{x^4}$	① $y = a\,x^3$
② $y = \sin a\,x$ $y' = a\cos a\,x$ $y'' = -a^2 \sin a\,x$ $y''' = -a^3 \cos a\,x$	② $y = \cos a\,x$

2．次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

例題　$y = x\,e^{-x}$

$$y' = (x)'\,e^{-x} + x\,(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} - x\,e^{-x} = -(x-1)\,e^{-x}$$
$$y'' = (-x+1)'\,e^{-x} + (-x+1)(e^{-x})'$$
$$= -e^{-x} - (-x+1)\,e^{-x} = (x-2)\,e^{-x}$$
$$y''' = (x-2)'\,e^{-x} + (x-2)(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} - (x-2)\,e^{-x} = -(x-3)\,e^{-x}$$

よって　$y^{(n)} = (-1)^n\,(x-n)\,e^{-x}$

問題　$y = x\,e^{x}$

3．次の陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

例題	問題
① $y^2 = 4x$ 両辺を x で微分して $2y\frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$	① $y^2 = -x$
② $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 両辺を x で微分して $\frac{2x}{4} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$	② $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

4．曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき，$\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

例題	問題
① $x = t^2 + 1,\ \ y = 2t$ $\frac{dx}{dt} = 2t,\ \ \frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ $= \frac{2t}{2} = t$	① $x = 6t^2 + 1,\ \ y = 4t^3$
② $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t$ $\frac{dx}{dt} = -2\cos t \sin t$ $\frac{dy}{dt} = 2\sin t \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t \cos t}{-2\cos t \sin t}$ $= -1$	② $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$

数学Ⅲ　n次導関数数 ③ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

例題　$y = x^2 e^{-x}$

$$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})'$$
$$= 2x\, e^{-x} - x^2 e^{-x}$$
$$= (-x^2 + 2x) e^{-x}$$

$$y'' = (-x^2 + 2x)' e^{-x} + (-x^2 + 2x)(e^{-x})'$$
$$= (-2x + 2) e^{-x} - (-x^2 + 2x) e^{-x}$$
$$= (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$$

$$y''' = (x^2 - 4x + 2)' e^{-x} + (x^2 - 4x + 2)(e^{-x})'$$
$$= (2x - 4) e^{-x} - (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$$
$$= (-x^2 + 6x - 6) e^{-x}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \{x^2 - 2nx + n(n-1)\}$$

※ $2, 4, 6, \cdots$ の数列は $a_n = 2n$

$0, 2, 6, \cdots$ の数列は $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n$

となる階差数列　$a_n = n(n-1)$

問題　$y = x^2 e^x$

2．次の関数を割った余りを指定した関数で表せ。

例題　関数 $f(x)$ を $(x-k)^3$ で割ったときの余りを $f(k)$, $f'(k)$, $f''(k)$ を用いて表せ。

$f(x)$ を $(x-k)^3$ で割った商を $Q(x)$ とすると

$f(x) = (x-k)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c$ とおける。

$$f'(x) = 3(x-k)^2 Q(x) + (x-k)^3 Q'(x) + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6(x-k) Q(x) + 3(x-k)^2 Q'(x)$$
$$+ 3(x-k)^2 Q'(x) + (x-k)^3 Q''(x) + 2a$$

$f''(k) = 2a$　より　$a = \dfrac{f''(k)}{2}$

$f'(k) = 2ak + b$　より　$b = f'(k) - f''(k)\,k$

$f(k) = ak^2 + bk + c$　より

$$c = f(k) - \frac{f''(k)}{2} k^2 - \{f'(k) - f''(k)\,k\}\,k$$

関数 $f(x)$ を $(x-k)^3$ で割ったときの余りは

$$\frac{f''(k)}{2} x^2 + \{f'(k) - f''(k)\,k\}\,x$$
$$+ f(k) + \frac{f''(k)}{2} k^2 - f'(k)\,k$$

問題　関数 $f(x)$ を $(x-k)^2$ で割ったときの余りを $f(k)$, $f'(k)$ を用いて表せ。