数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ より，次の極限を求めよ。

Find the limit value using $\lim_{h \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

例題	問題
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ $\frac{2}{n} = t$ とおく。 $n \to \infty$のとき $t \to 0$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ $= \lim_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{2}{t}}$ $= \lim_{t\to\infty}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2$ $= e^2$	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2．次の極限を求めよ。

Find the limit value.

例題	問題
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}$ $f(x) = \log(x+1)$ とおく。 $f(0) = \log 1 = 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-0}{x-0}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $= f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$

3．次の関数を微分せよ。　※ $\log_e x$ を $\log x$ と書く。

Differentiate the following function.

例題	問題
① $y = \log_2 x$ $y' = \frac{1}{x \log 2}$	① $y = \log_3 x$
② $y = \log 5x$ $y' = \frac{1}{5x} \times (5x)'$ $= \frac{1}{x}$	② $y = \log 4x$
③ $y = \log(x^2+3)$ $y' = \frac{1}{x^2+3} \times (x^2+3)'$ $= \frac{2x}{x^2+3}$	③ $y = \log(x+2)$
④ $y = 4^x$ $y' = 4^x \log 4$	④ $y = 3^x$
⑤ $y = 2^{3x}$ $y' = 2^{3x} \log 2 \times (3x)'$ $= 3 \times 2^{3x} \log 2$	⑤ $y = 3^{2x}$
⑥ $y = e^{4x}$ $y' = e^{4x} \times (4x)'$ $= 4e^{4x}$	⑥ $y = e^{3x}$
⑦ $y = x^2 \log x$ $y' = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)'$ $= 2x \log x + x^2 \times \frac{1}{x}$ $= 2x \log x + x$	⑦ $y = x \log x$
⑧ $y = x^3 e^x$ $y' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)'$ $= 3x^2 e^x + x^3 e^x$ $= (x^3 + 3x^2) e^x$	⑧ $y = x^2 e^x$

数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ② 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ より，次の極限を求めよ。

例題	問題
$\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{-\frac{2}{h}}$ $=\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{\left\{\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right\}^2}$ $=\dfrac{1}{e^2}$	$\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{-\frac{1}{2h}}$

2．次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$\log_a x$ を微分せよ。
a は 1 でない正の定数とする。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{\frac{}{}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと　$h\to 0$ のとき，$t\to\boxed{}$

$$\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)^{\frac{1}{h}}=\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{}$$

底の変換公式より　$\log_a e=\boxed{\dfrac{\log_e}{\log_e}}=\boxed{\dfrac{1}{\log}}$

$$(\log_a x)'=\boxed{\frac{}{}}$$

3．次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$y=a^x$ を微分せよ。

$y=a^x$　の両辺を a を底とする対数をとると

$\log_a y=\boxed{\log_a}=\boxed{\log_a a}=x$

$x=\log_a y$ を微分すると　$\dfrac{dx}{dy}=\boxed{\dfrac{}{}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\boxed{\dfrac{}{}}}=\boxed{}$$

4．次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=\log_{10}x$ $y'=\dfrac{1}{x\log 10}$	① $y=\log_4 x$
② $y=\log\lvert 3x+1\rvert$ $y'=\dfrac{1}{3x+1}\times(3x+1)'$ $=\dfrac{3}{3x+1}$	② $y=\log\lvert 2x+1\rvert$
③ $y=\log\lvert\sin x\rvert$ $y'=\dfrac{1}{\sin x}\times(\sin x)'$ $=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	③ $y=\log\lvert\cos x\rvert$
④ $y=2^x$ $y'=2^x\log 2$	④ $y=8^x$
⑤ $y=e^{4x+1}$ $y'=e^{4x+1}\times(4x+1)'$ $=4e^{4x+1}$	⑤ $y=e^{3x+1}$
⑥ $y=\dfrac{e^x}{x^2}$ ※商の公式 $y'=\dfrac{(e^x)'x^2-e^x(x^2)'}{x^4}$ $=\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}$ $=\dfrac{xe^x-2e^x}{x^3}$ ※積の公式 $y'=(e^x)'x^{-2}+e^x(x^{-2})'$ $=x^{-2}e^x-2x^{-3}e^x$ $=\dfrac{xe^x-2e^x}{x^3}$	⑥ $y=\dfrac{e^x}{x}$

数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ③ 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　　　　　　)

1．$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ より，次の極限を求めよ。

例題　$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$

$-\frac{2}{x}=h$ とすると $x=-\frac{3}{h}$

$x\to\infty$ のとき $h\to 0$ より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{-\frac{3}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left\{\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right\}^{3}}=\frac{1}{e^{3}}$$

問題　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$

2．次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$\log_a x$ を微分せよ。
a は 1 でない正の定数とする。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{\frac{}{}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$\frac{h}{x}=t$ とおくと $h\to 0$ のとき，$t\to\boxed{}$

$$\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)^{\frac{1}{h}}=\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{}$$

底の変換公式より $\log_a e=\boxed{\frac{\log_e}{\log_e}}=\boxed{\frac{1}{\log}}$

$$(\log_a x)'=\boxed{\frac{}{}}$$

3．次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$y=a^{x}$ を微分せよ。

$y=a^{x}$ の両辺を a を底とする対数をとると

$$\log_a y=\boxed{\log_a}=\boxed{\log_a a}=x$$

$x=\log_a y$ を微分すると $\frac{dx}{dy}=\boxed{\frac{}{}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\boxed{\frac{}{}}}=\boxed{}$$

4．次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=3^{x}$ $y'=3^{x}\log 3$	① $y=5^{x}$
② $y=\log_3 x$ $y'=\frac{1}{x\log 3}$	② $y=\log_5 x$
③ $y=\log\lvert 2-x\rvert$ $y'=\frac{1}{2-x}\times(2-x)'$ $=\frac{-1}{2-x}=\frac{1}{x-2}$	③ $y=\log\lvert 1-x\rvert$
④ $y=e^{2x-1}$ $y'=e^{2x-1}\times(2x-1)'$ $=2e^{2x-1}$	④ $y=e^{3x+1}$
⑤ $y=\frac{x^{2}}{e^{x}}$ ※商の公式 $y'=\frac{(x^{2})'e^{x}-x^{2}(e^{x})'}{e^{2x}}$ $=\frac{2xe^{x}-x^{2}e^{x}}{e^{2x}}$ $=\frac{2x-x^{2}}{e^{x}}$	⑤ $y=\frac{x}{e^{x}}$

数学Ⅲ　対数関数の導関数　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の計算をせよ。

例題 $\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$=\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

問題 $\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

2．次の式を微分せよ。

例題① $y=\log\left(x^2+1\right)$

$y'=\dfrac{1}{x^2+1}\times\left(x^2+1\right)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

問題① $y=\log\left(x^2-1\right)$

例題② $y=\log\left(\sin x\right)$

$y'=\dfrac{1}{\sin x}\times\left(\sin x\right)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$

問題② $y=\log\left(\cos x\right)$

例題③ $y=\dfrac{1}{3}\left(\log x\right)^3$

$y'=\dfrac{1}{3}\times 3\times\left(\log x\right)^2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\left(\log x\right)^2}{x}$

問題③ $y=\dfrac{1}{2}\left(\log x\right)^2$

例題④ $y=x\log x+x$

$y'=\left(x\right)'\log x+x\left(\log x\right)'+\left(x\right)'$

$=\log x+x\times\dfrac{1}{x}+1=\log x+2$

問題④ $y=x\log x-x$

3．次の式を微分せよ。

例題① $y=x+\sqrt{x^2-1}$

$y'=1+\dfrac{1}{2}\times 2x\times\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

問題① $y=x+\sqrt{x^2+1}$

例題② $y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\times\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'$

$=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

問題② $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

例題③ $y=\dfrac{\log x}{x^2}$

$y'=\dfrac{\left(\log x\right)'\times x^2-\log x\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$

$=\dfrac{x-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

問題③ $y=\dfrac{\log x}{x^3}$

数学Ⅲ　指数関数の導関数　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ より，次の極限を求めよ。

例題

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$n=\dfrac{1}{2x}$ とおくと

$x\to +0$　のとき　$n\to\infty$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

問題

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2x}$$

2. 定義に従って，次の関数を微分せよ。

例題　$f(x)=2^x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2^x(2^h-1)}{h}=2^x\times\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$$

$y=2^h-1$　とおくと　$h=\log_2(1+y)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_2(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log_2(1+y)}{y}}=\frac{1}{\log_2 e}=\log 2$$

ゆえに　$f'(x)=2^x\log 2$

問題　$f(x)=e^x$

3. 次の関数を微分せよ。

例題①　$y=3^x$

$y'=3^x\log 3$

問題①　$y=5^x$

例題②　$y=3^{x+1}$　　$=3\times 3^x$

$y'=3^{x+1}\log 3\times(x+1)'$

$=3^{x+1}\log 3$

問題②　$y=2^{x+1}$

例題③　$y=e^{2x+1}$

$y'=e^{2x+1}\times(2x+1)'$

$=e^{2x+1}\times 2=2\times e^{2x+1}$

問題③　$y=e^{-x+1}$

例題④　$y=\dfrac{e^x}{x}$

$$y'=\left(e^x\right)'\times\frac{1}{x}+e^x\times\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^x\times\frac{1}{x}+e^x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

問題④　$y=\dfrac{e^x}{x^2}$

数学Ⅲ　対数微分法 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．$\{\log|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を用いて，関数を微分せよ。

例題　$y = \dfrac{x^2(x+1)}{x+2}$

$\log|y| = 2\log|x| + \log|x+1| - \log|x+2|$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x+2) + x(x+2) - x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+7x+4}{x(x+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{2x^2+7x+4}{x(x+1)(x+2)} \times \frac{x^2(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{(2x^2+7x+4)x}{(x+2)^2}$$

問題　$y = \dfrac{x^2(x+3)}{x+1}$

2．対数微分法により，次の関数を微分せよ。

例題①　$y = x^{\sin x}$　　$(x > 0)$

$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \times \log x$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \times \log x + \sin x \times (\log x)'$$

$$= \cos x \times \log x + \sin x \times \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(\cos x \times \log x + \sin x \times \frac{1}{x}\right) \times x^{\sin x}$$

問題①　$y = x^{\cos x}$　　$(x > 0)$

例題②　$y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$\log|y| = \log\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x+1|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{x+2}{2x(x+1)}$$

$$y' = \frac{x+2}{2x(x+1)} \times \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$y' = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

問題②　$y = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$