数学Ⅲ　合成関数の微分法 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って求めよ。
Find the derivative $f'(x)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$f(x)=(3x+1)^2$

$f(x+h)-f(x)=\{3(x+h)+1\}^2-(3x+1)^2\}$

$=9(x+h)^2+6(x+h)+1-(9x^2+6x+1)$

$=9x^2+18hx+9h^2+6x+6h+1-9x^2-6x-1$

$=9h^2+18hx+6h$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{9h^2+18hx+6h}{h}$

$=18x+6=2(3x+1)\times3$

問題①　$f(x)=(3x-1)^2$

問題②　$f(x)=(2x+1)^2$

2．合成関数の微分法の微分公式を完成せよ。
Complete the differential formula for the differential method of composite functions.

$\{f(g(x))\}'$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\boxed{f(g(\qquad))}-\boxed{f(g(\qquad))}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\dfrac{f(g(x+h))-f(g(x))}{\boxed{\qquad\qquad}}\times\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$

$g(x+h)=g(x)+i$ とおくと，$h\to0$ のとき $i\to0$

$\{f(g(x))\}'$

$=\lim_{h,i\to0}\left\{\dfrac{f(g(x)+i)-f(g(x))}{\boxed{\qquad\qquad}}\times\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$

$=\boxed{f'(\qquad\qquad)}$

3．次の関数 $f(x)$ を微分せよ。Differentiate the following function $f(x)$.

例題①　$y=(2x+1)^3$

$y'=3(2x+1)^2\times(2x+1)'=6(2x+1)^2$

$=3(2x+1)^2\times2$

問題①　$y=(3x+2)^4$

例題②　$y=(1-2x)^5$

$y'=5(1-2x)^4\times(1-2x)'=-10(1-2x)^4$

$=5(1-2x)^4\times(-2)$

問題②　$y=(-3x+1)^3$

例題③　$y=(x^2+1)^2$

$y'=2(x^2+1)\times(x^2+1)'=4x(x^2+1)$

$=2(x^2+1)\times2x$

問題③　$y=(x^2+2)^3$

例題④　$y=\dfrac{1}{x^2+1}=(x^2+1)^{-1}$

$y'=-(x^2+1)^{-2}\times(x^2+1)'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$=-(x^2+1)^{-2}\times2x$

問題④　$y=\dfrac{1}{x^3+1}$

例題⑤　$y=\sqrt{4x-1}=(4x-1)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\times(4x-1)'=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$

$=\dfrac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\times4$

問題⑤　$y=\sqrt{2x+1}$

数学Ⅲ　合成関数の微分法 ②　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=(x^2+1)^3$ $u=x^2+1$ とすると $y=u^3$ $\frac{dy}{du}=3u^2$ $\frac{du}{dx}=2x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $=3u^2\times 2x$ $=6x(x^2+1)^2$	① $y=(3x+1)^2$
② $y=\frac{1}{(2x+1)^3}$ $u=2x+1$ とすると $y=\frac{1}{u^3}=u^{-3}$ $\frac{dy}{du}=\frac{-3}{u^4}$ $\frac{du}{dx}=2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $=\frac{-3}{u^4}\times 2$ $=\frac{-6}{(2x+1)^4}$	② $y=\frac{1}{(x^2+1)^3}$

2．逆関数の微分法を用いて，次の関数を微分せよ。

例題	問題
$y=\sqrt[3]{x}$ x について解くと $x=y^3$ $\frac{dx}{dy}=3y^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ $=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$ $=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y=\sqrt[5]{x}$

3．p が有理数のとき，$(x^p)'=px^{p-1}$ になる。この公式を用いて次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=\sqrt[4]{x}$ $y'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'$ $=\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$ $=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$	① $y=\sqrt[3]{x}$
② $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $y'=\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'$ $=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}$ $=-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$	② $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

数学Ⅲ　合成関数の微分法 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．合成関数の微分法の微分公式を完成せよ。

$\{f(g(x))\}'$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{f(g(\quad\quad))-f(g(\quad))}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(g(x+h))-f(g(x))}{\boxed{\quad\quad}} \times \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \right\}$

$g(x+h)=g(x)+i$ とおくと，$h\to 0$ のとき $i\to 0$

$\{f(g(x))\}'$

$= \lim_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(g(x)+i)-f(g(x))}{\boxed{\quad\quad}} \times \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} \right\}$

$= \boxed{f'(\quad\quad)}$

2．次の関数 $f(x)$ を微分せよ。

例題①　$y=(2x+1)^3$

$y'=3(2x+1)^2\times(2x+1)'=6(2x+1)^2$

$=3(2x+1)^2\times 2$

問題①　$y=(3x+2)^4$

例題②　$y=(x^2+1)^2$

$y'=2(x^2+1)\times(x^2+1)'=4x(x^2+1)$

$=2(x^2+1)\times 2x$

問題②　$y=(x^2+2)^3$

例題③　$y=\dfrac{1}{x^2+1}=(x^2+1)^{-1}$

$y'=-(x^2+1)^{-2}\times(x^2+1)'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$=-(x^2+1)^{-2}\times 2x$

問題③　$y=\dfrac{1}{x^3+1}$

3．r が有理数のとき，x^r の微分公式を完成せよ。

n を正の整数，m を整数とし，$r=\dfrac{m}{n}$ とする。

$y=x^{\frac{m}{n}}$ とおくと，$y^n=\boxed{\quad\quad}$

この式の両辺を x で微分すると

$ny^{n-1}\times y'=\boxed{\quad\quad}$

$y'=\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{ny^{n-1}}=\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{n(\quad\quad)^{n-1}}}$

$=\dfrac{m}{n}\boxed{x\quad}=\boxed{rx\quad}$

4．次の関数 $f(x)$ を微分せよ。

例題①　$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$y'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

問題①　$y=\sqrt[4]{x}$

例題②　$y=\sqrt{6x-1}=(6x-1)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}(6x-1)^{\frac{1}{2}-1}\times(6x-1)'$

$=\dfrac{1}{2}(6x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 6=\dfrac{3}{\sqrt{6x-1}}$

問題②　$y=\sqrt{4x+1}$

5．逆関数の微分法を用いて，微分せよ。

例題　$y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$

$x=y^5$，　y で微分すると $\dfrac{dx}{dy}=5y^4$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{5y^4}=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

問題　$y=\sqrt[6]{x}$