数学Ⅲ　合成関数の微分法 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　)

1． 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って求めよ。
Find the derivative $f'(x)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$f(x)=(3x+1)^2$

$$f(x+h)-f(x)=\{3(x+h)+1\}^2-(3x+1)^2\}$$
$$=9(x+h)^2+6(x+h)+1-(9x^2+6x+1)$$
$$=9x^2+18hx+9h^2+6x+6h+1-9x^2-6x-1$$
$$=9h^2+18hx+6h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{9h^2+18hx+6h}{h}$$
$$=18x+6=2(3x+1)\times 3$$

問題①　$f(x)=(3x-1)^2$

問題②　$f(x)=(2x+1)^2$

2． 合成関数の微分法の微分公式を完成せよ。
Complete the differential formula for the differential method of composite functions.

$$\{f(g(x))\}'$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{f(g(\qquad\quad))}-\boxed{f(g(\quad\;))}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$g(x+h)=g(x)+i$ とおくと，$h\to 0$ のとき $i\to 0$

$$\{f(g(x))\}'$$
$$=\lim_{h,i\to 0}\left\{\frac{f(g(x)+i)-f(g(x))}{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=\boxed{f'(\qquad\qquad)}$$

3． 次の関数 $f(x)$ を微分せよ。 Differentiate the following function $f(x)$.

例題①　$y=(2x+1)^3$

$$y'=3(2x+1)^2\times(2x+1)'=6(2x+1)^2$$
$$=3(2x+1)^2\times 2$$

問題①　$y=(3x+2)^4$

例題②　$y=(1-2x)^5$

$$y'=5(1-2x)^4\times(1-2x)'=-10(1-2x)^4$$
$$=5(1-2x)^4\times(-2)$$

問題②　$y=(-3x+1)^3$

例題③　$y=(x^2+1)^2$

$$y'=2(x^2+1)\times(x^2+1)'=4x(x^2+1)$$
$$=2(x^2+1)\times 2x$$

問題③　$y=(x^2+2)^3$

例題④　$y=\dfrac{1}{x^2+1}=(x^2+1)^{-1}$

$$y'=-(x^2+1)^{-2}\times(x^2+1)'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=-(x^2+1)^{-2}\times 2x$$

問題④　$y=\dfrac{1}{x^3+1}$

例題⑤　$y=\sqrt{4x-1}=(4x-1)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\times(4x-1)'=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}$$
$$=\frac{1}{2}(4x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 4$$

問題⑤　$y=\sqrt{2x+1}$

数学Ⅲ　合成関数の微分法 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1． 次の関数を微分せよ。 Differentiate the following function.

例題	問題
① $y=(x^2+1)^3$ $u=x^2+1$ とすると $y=u^3$ $\dfrac{dy}{du}=3u^2$ $\dfrac{du}{dx}=2x$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ $=3u^2\times 2x$ $=6x(x^2+1)^2$	① $y=(3x+1)^2$
② $y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $u=2x+1$ とすると $y=\dfrac{1}{u^3}=u^{-3}$ $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{-3}{u^4}$ $\dfrac{du}{dx}=2$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ $=\dfrac{-3}{u^4}\times 2$ $=\dfrac{-6}{(2x+1)^4}$	② $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

2． 逆関数の微分法を用いて，次の関数を微分せよ。 Differentiate the following function using the inverse function differentiation method.

例題	問題
$y=\sqrt[3]{x}$ x について解くと $x=y^3$ $\dfrac{dx}{dy}=3y^2$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$ $=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$ $=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y=\sqrt[5]{x}$

3． p が有理数のとき，$(x^p)'=px^{p-1}$ になる。この公式を用いて次の関数を微分せよ。 Differentiate the next function using the differential formula.

例題	問題
① $y=\sqrt[4]{x}$ $y'=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'$ $=\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}$ $=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$	① $y=\sqrt[3]{x}$
② $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $y'=\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'$ $=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}$ $=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$	② $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

数学Ⅲ　合成関数(ごうせいかんすう)の微分法(びぶんほう) ③ 課題(かだい)

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1． 合成関数(ごうせいかんすう)の微分法(びぶんほう)の微分公式(びぶんこうしき)を完成(かんせい)せよ。
Complete the formula for the differential method of composite functions.

$\{f(g(x))\}'$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\boxed{f(g(\qquad))} - \boxed{f(g(\quad))}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{\boxed{\qquad}} \times \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$

$g(x+h) = g(x) + i$ とおくと，$h \to 0$ のとき $i \to 0$

$\{f(g(x))\}'$

$= \lim_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(g(x)+i) - f(g(x))}{\boxed{\qquad}} \times \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$

$= \boxed{f'(\qquad)}$

2． 次(つぎ)の関数(かんすう)を微分(びぶん)せよ。　Differentiate the following function.

例題(れいだい)①　$y = (2x+1)^3$

$y' = 3(2x+1)^2 \times (2x+1)' = 6(2x+1)^2$

$= 3(2x+1)^2 \times 2$

問題(もんだい)①　$y = (3x+2)^4$

例題(れいだい)②　$y = (x^2+1)^2$

$y' = 2(x^2+1) \times (x^2+1)' = 4x(x^2+1)$

$= 2(x^2+1) \times 2x$

問題(もんだい)②　$y = (x^2+2)^3$

例題(れいだい)③　$y = \dfrac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$

$y' = -(x^2+1)^{-2} \times (x^2+1)' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$= -(x^2+1)^{-2} \times 2x$

問題(もんだい)③　$y = \dfrac{1}{x^3+1}$

3． r が有理数(ゆうりすう)のとき，x^r の微分公式(びぶんこうしき)を完成(かんせい)せよ。
Complete the differential formula for x^r when r is a rational number.

n を正(せい)の整数(せいすう)，m を整数(せいすう)とし，$r = \dfrac{m}{n}$ とする。

$y = x^{\frac{m}{n}}$ とおくと，$y^n = \boxed{\qquad}$

この式(しき)の両辺(りょうへん)を x で微分(びぶん)すると

$n y^{n-1} \times y' = \boxed{\qquad}$

$y' = \dfrac{\boxed{\qquad}}{n y^{n-1}} = \dfrac{\boxed{\qquad}}{\boxed{n(\qquad)^{n-1}}}$

$= \dfrac{m}{n} \boxed{x\qquad} = \boxed{r\,x\qquad}$

4． 次(つぎ)の関数(かんすう)を微分(びぶん)せよ。　Differentiate the following function.

例題(れいだい)①　$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$y' = \dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

問題(もんだい)①　$y = \sqrt[4]{x}$

例題(れいだい)②　$y = \sqrt{6x-1} = (6x-1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}(6x-1)^{\frac{1}{2}-1} \times (6x-1)'$

$= \dfrac{1}{2}(6x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 6 = \dfrac{3}{\sqrt{6x-1}}$

問題(もんだい)②　$y = \sqrt{4x+1}$

5． 逆関数(ぎゃくかんすう)の微分法(びぶんほう)を用(もち)いて，微分(びぶん)せよ。
Differentiate the function using the inverse function differentiation method.

例題(れいだい)　$y = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

$x = y^5$，y で微分(びぶん)すると　$\dfrac{dx}{dy} = 5y^4$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{5y^4} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

問題(もんだい)　$y = \sqrt[6]{x}$