数学Ⅲ　積・商の微分法 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の文章の$\boxed{}$を埋めて，次の導関数を求めよ。

Fill in the blanks in the following sentences to find the following derivative.

① $\{f(x)g(x)\}'$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{\boxed{} - f(x)g(x)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \right\} g(x+h) +$$

$$\lim_{h\to 0} f(x) \left\{ \frac{\boxed{} - g(x)}{h} \right\}$$

$$= \boxed{}$$

② $\left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}'$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{} - \boxed{}}{h \times g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ - \frac{\boxed{} - \boxed{}}{h} \times \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right\}$$

$$= \boxed{\dfrac{}{}}$$

③ $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}'$

$$= \left\{ f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right\}'$$

$$= f'(x) \times \boxed{} + f(x) \times \left\{ \boxed{} \right\}'$$

$$= \boxed{}$$

2．次の関数を微分せよ。　Differentiate the following function.

例題	問題
① $y = x^3$ $y' = 3x^{3-1}$ $= 3x^2$	① $y = x^2$
② $y = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ $y' = -3x^{-3-1}$ $= -3x^{-4}$ $= \dfrac{-3}{x^4}$	② $y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$
③ $y = (x-1)(x^4+1)$ $y' = (x-1)'(x^4+1) +$ $(x-1)(x^4+1)'$ $= 1 \times (x^4+1) +$ $(x-1) \times 4x^3$ $= 5x^4 - 4x^3 + 1$	③ $y = (x+1)(x^2+1)$
④ $y = \dfrac{1}{x+2}$ $y' = -\dfrac{(x+2)'}{(x+2)^2}$ $= -\dfrac{1}{(x+2)^2}$	④ $y = \dfrac{1}{x+5}$
⑤ $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ $y' = -\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$ $= -\dfrac{2x}{(x+2)^2}$	⑤ $y = \dfrac{1}{x^2+x}$

数学Ⅲ　積・商の微分法 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の文章の□を埋めて，次の導関数を求めよ。

①$\{f(x)g(x)\}'$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)g(x+h)-\boxed{}}{h}\right.$$

$$\left.\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\right\}g(x+h)+$$

$$\lim_{h\to 0}f(x)\left\{\frac{\boxed{}-g(x)}{h}\right\}$$

$$= \boxed{}$$

② $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\boxed{\dfrac{}{}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\boxed{}-f(x)\boxed{}}{h\times g(x+h)\times g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h\times g(x+h)\times g(x)}\right. -$$

$$\left.\frac{f(x)g(x+h)-\boxed{}}{h\times g(x+h)\times g(x)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\times\frac{\boxed{}}{g(x+h)\times g(x)}\right\} -$$

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(h)}{h}\times\frac{\boxed{}}{g(x+h)\times g(x)}\right\}$$

$$= \boxed{\dfrac{}{}}$$

2．商の導関数の公式 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'$ において $f(x)=1$ として $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$ を求めよ。

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \frac{}{\{g(x)\}^2} = \frac{}{\{g(x)\}^2}$$

3．次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=(x^2-1)(x^2+1)$ $y'=(x^2-1)'(x^2+1)+(x^2-1)(x^2+1)'$ $=2x\times(x^2+1)+(x^2-1)\times 2x$ $=4x^3$	① $y=(x+2)(x-2)$
② $y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ $y'=-1x^{-1-1}$ $=-x^{-2}$ $=-\dfrac{1}{x^2}$	② $y=\dfrac{1}{x^4}=x^{-4}$
③ $y=\dfrac{1}{x-2}$ $y'=-\dfrac{(x-2)'}{(x-2)^2}$ $=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$	③ $y=\dfrac{1}{x-3}$
④ $y=\dfrac{1}{3x+1}$ $y'=-\dfrac{(3x+1)'}{(3x+1)^2}$ $=-\dfrac{3}{(3x+1)^2}$	④ $y=\dfrac{1}{2x+3}$

数学Ⅲ　積・商の微分法 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の文章の$\boxed{\quad}$を埋めて，次の導関数を求めよ。

① $\{f(x)g(x)\}'$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h)g(x+h) - \boxed{\qquad\qquad} + \boxed{\qquad\qquad} - f(x)g(x)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(h)}{h} \right\} \times \boxed{\qquad} + \lim_{h\to 0} \boxed{\qquad} \times \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

② $\left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}'$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \frac{1}{\boxed{\qquad\qquad}} \right\}$$

$$= \boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$$

③ $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}'$

$$= \left\{ f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right\}'$$

$$= \boxed{\qquad} \times \frac{1}{g(x)} + \boxed{\qquad} \times \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}'$$

$$= \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

2．次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y = x^4$ $y' = 4x^{4-1}$ $= 4x^3$	① $y = x^5$
② $y = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ $y' = -4x^{-4-1}$ $= -4x^{-5}$ $= \dfrac{-4}{x^5}$	② $y = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$
③ $y = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ $y' = (x^3 - 1)'(x^3 + 1) +$ $(x^3 - 1)(x^3 + 1)'$ $= 3x^2 \times (x^3 + 1) +$ $(x^3 - 1) \times 3x^2$ $= 6x^5$	③ $y = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
④ $y = \dfrac{1}{2x + 1}$ $y' = -\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}$ $= -\dfrac{2}{(2x+1)^2}$	④ $y = \dfrac{1}{3x + 1}$
⑤ $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$ $y' = -\dfrac{(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2}$ $= -\dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}$	⑤ $y = \dfrac{1}{x^2 + x}$

数学Ⅲ　積の微分法 ① 課題　　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

1．関数 $f(x)=x^n$ を二項定理を用いて，微分せよ。

二項定理より

$(x+h)^n = {}_nC_0\, x^n + {}_nC_1\, x^{n-1} h + \cdots + {}_nC_n\, h^n$

$(x+h)^n - x^n = \boxed{}$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\boxed{}\right)$$

$$=\boxed{{}_nC_1}=\boxed{}$$

2．微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の公式を証明せよ。

例題　$\{k f(x)\}' = k f'(x)$

$$\{k f(x)\}' = \lim_{h\to0}\frac{k f(x+h)-k f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times k = k f'(x)$$

問題　$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$

3．次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，積の微分公式を完成せよ。

$\{f(x)g(x)\}'$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)g(x+h)-\boxed{}}{h}+\frac{\boxed{}-f(x)g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\right\}\boxed{}$$

$$\lim_{h\to0}\boxed{}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\boxed{}$$

4．次の関数 $f(x)$ を積の微分公式を用いて微分せよ。

例題①　$f(x)=(x+3)^2$

$f(x)=(x+3)(x+3)$ より

$f'(x)=(x+3)'(x+3)+(x+3)(x+3)'$

$=2(x+3)'(x+3)=2(x+3)$

$=2(x+3)$

問題①　$f(x)=(x+4)^2$

例題②　$f(x)=(x+1)(x+3)$

$f'(x)=(x+1)'(x+3)+(x+1)(x+3)'$

$=(x+3)+(x+1)=2x+4$

$=2x+4$

問題②　$f(x)=(x+1)(x+4)$

例題③　$f(x)=(x+3)(x^2+6x+9)$

$f'(x)=(x+3)'(x^2+6x+9)+(x+3)(x^2+6x+9)'$

$=(x^2+6x+9)+(x+3)(2x+6)$

$=x^2+6x+9+2x^2+12x+18$

$=3x^2+18x+27$

問題③　$f(x)=(x+2)(x^2+4x+4)$

数学Ⅲ　積(せき)の微分法(びぶんほう) ② 課題(かだい)

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次(つぎ)の関数(かんすう) $f(x)$ の導関数(どうかんすう) $f'(x)$ を定義(ていぎ)に従(したが)って求(もと)めよ。

例題(れいだい)　$f(x)=(x+1)^2$

$f(x+h)-f(x)=\{(x+h)+1\}^2-(x+1)^2\}$

$=(x+h)^2+2(x+h)+1-(x^2+2x+1)$

$=x^2+2hx+h^2+2x+2h+1-x^2-2x-1$

$=h^2+2hx+2h$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2+2hx+2h}{h}=2x+2$$

問題(もんだい)①　$f(x)=(x+2)^2$

問題(もんだい)②　$f(x)=(x+3)^2$

2．次(つぎ)の文章(ぶんしょう)の $\boxed{}$ を埋(う)めて，積(せき)の微分公式(びぶんこうしき)を完成(かんせい)せよ。

$\{f(x)g(x)\}'$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)g(x+h)-\boxed{}}{h}+\frac{\boxed{}-f(x)g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\right\}\boxed{}$$

$$\lim_{h\to0}\boxed{}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$=\boxed{}$

3．次(つぎ)の関数(かんすう) $f(x)$ を積(せき)の微分公式(びぶんこうしき)を用(もち)いて微分(びぶん)せよ。

例題(れいだい)①　$f(x)=(x+1)^2$

$f(x)=(x+1)(x+1)$ より

$f'(x)=(x+1)'(x+1)+(x+1)(x+1)'$

$=2(x+1)'(x+1)=2(x+1)$

問題(もんだい)①　$f(x)=(x+2)^2$

例題(れいだい)②　$f(x)=(x+1)(x+2)$

$f'(x)=(x+1)'(x+2)+(x+1)(x+2)'$

$=(x+2)+(x+1)=2x+3$

問題(もんだい)②　$f(x)=(x+2)(x+3)$

例題(れいだい)③　$f(x)=(x+2)(x^2-2x+4)$

$f'(x)=(x+2)'(x^2-2x+4)+(x+2)(x^2-2x+4)'$

$=(x^2-2x+4)+(x+2)(2x-2)$

$=x^2-2x+4+2x^2+2x-4=3x^2$

問題(もんだい)③　$f(x)=(x+3)(x^2-3x+9)$

数学Ⅲ　商の微分法 ① 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って求めよ。

例題　$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{(x+h)-1}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{x-1}{(x+h-1)(x-1)}-\frac{x+h-1}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

問題　$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

2．次の文章の $\boxed{\quad}$ を埋めて，商の微分公式を完成せよ。

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\qquad}-\boxed{\qquad}}{h\times g(x+h)\,g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{\boxed{\qquad}-\boxed{\qquad}}{h}\times\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\right\}$$

$$=\boxed{\frac{\qquad}{\qquad}}$$

3．積の微分公式を利用して，商の微分公式を完成せよ。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'$$

$$=\left\{f(x)\times\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=f'(x)\times\boxed{\qquad}+f(x)\times\left\{\boxed{\qquad}\right\}'$$

$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

4．次の関数 $f(x)$ を微分せよ。

例題①　$f(x)=\dfrac{1}{x+3}$

$$f'(x)=-\frac{(x+3)'}{(x+3)^2}=-\frac{1}{(x+3)^2}$$

問題①　$f(x)=\dfrac{1}{x+5}$

例題②　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

$$f'(x)=-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

問題②　$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

例題③　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x^2+1)-(x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

問題③　$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+2}$

数学Ⅲ　商の微分法 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$について，次の公式を求めよ。

問題①　$\{f(x)+g(x)\}'$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{\boxed{\qquad\qquad}\}}{h}$$

$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

問題②　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\boxed{\dfrac{\quad}{\quad}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\boxed{\qquad}-f(x)\boxed{\qquad}}{h\times g(x+h)\times g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h\times g(x+h)\times g(x)}-\frac{f(x)g(x+h)-\boxed{\qquad}}{h\times g(x+h)\times g(x)}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(h)}{h}\times\frac{\boxed{\qquad}}{g(x+h)\times g(x)}\right\}-\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(h)}{h}\times\frac{\boxed{\qquad}}{g(x+h)\times g(x)}\right\}$$

$$=\boxed{\dfrac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}}$$

2．商の導関数の公式 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'$ において $f(x)=1$ として $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$ を求めよ。

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

3．次の関数 $f(x)$を微分せよ。

例題①　$f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$

$$f'(x)=-\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2}=-\frac{2}{(2x+3)^2}$$

問題①　$f(x)=\dfrac{1}{3x-2}$

例題②　$f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$

$$f'(x)=-\frac{(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}=-\frac{4x}{(2x^2+1)^2}$$

問題②　$f(x)=\dfrac{1}{4x^2-1}$

例題③　$f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

$$f'(x)=\frac{(2x)'(x^2-1)-2x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

問題③　$f(x)=\dfrac{4x}{4x^2-1}$