

1 . 関数  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であるとき , 次の極限値を  $f'(a)$  ,  $f(a)$  を用いた式で表せ。

When the function  $f(x)$  is differentiable at  $x = a$ , express the following limit value using  $f'(a)$ ,  $f(a)$ .

例題

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{-3h} \times (-3) = -3 f'(a)$$

問題

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-4h) - f(a)}{h}$$

例題

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-h)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h}$$
$$= 3 f'(a) - \{ - f'(a) \} = 4 f'(a)$$

問題

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a+h)}{h}$$

2 . 次の関数  $f(x)$  の微分係数  $f'(1)$  を定義に従って求めよ。

Find the differential coefficient  $f'(1)$  of the following function  $f(x)$  according to the definition.

例題

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$
$$f(1+h) - f(1) = \frac{1}{2(1+h)+1} - \frac{1}{2 \times 1 + 1}$$
$$= \frac{3}{3(2h+3)} - \frac{2h+3}{3(2h+3)} = \frac{-h}{3(2h+3)}$$
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{3(2h+3)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{9}$$

問題

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

3 . 次の関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を定義に従って求めよ。

Find the derivative  $f'(x)$  of the following function  $f(x)$  according to the definition.

例題

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$
$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1}$$
$$= \frac{2x+1}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)} - \frac{2(x+h)+1}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}$$
$$= \frac{-h}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}$$
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

問題

$$f(x) = \frac{1}{3x+1}$$

例題

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$$
$$= \frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$$
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \times \frac{1}{h}$$
$$= \frac{-1}{2(\sqrt{x})^3} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

問題

$$f(x) = \sqrt{x}$$

1. 関数  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であるとき，次の極限値を  $f'(a)$ ,  $f(a)$  等を用いた式で表せ。

例題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - x^3 f(x)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (-x^3) = -x^3 f'(a)$$

問題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - x^2 f(x)}{x - a}$$

例題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(x) - a^3 f(x)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)f(x)}{x - a} = 3a^2 f(a)$$

問題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(x)}{x - a}$$

例題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - x^3 f(x) + x^3 f(x) - a^3 f(x)}{x - a}$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - x^3 f(x)}{x - a} = a^3 f'(a)$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(x) - a^3 f(x)}{x - a} = 3a^2 f(a)$$

よって  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a} = -a^3 f'(a) + 3a^2 f(a)$

問題

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$$

2. 次の関数  $f(x)$  の微分係数  $f'(1)$  を定義に従って求めよ。

例題

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$
$$f(1+h) - f(1) = \frac{1}{(1+h)^3} - \frac{1}{1^3}$$
$$= \frac{1}{(1+h)^3} - \frac{1^3+3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3} = -\frac{3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3}$$
$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3} \right) \times \frac{1}{h} = -3$$

問題

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

3. 次の関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を定義に従って求めよ。

例題

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2}{x^2(x+h)^2} - \frac{x^2+2xh+h^2}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2hx+h^2}{x^2(x+h)^2}$$
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{2hx+h^2}{x^2(x+h)^2} \right) \times \frac{1}{h} = -\frac{2}{x^3}$$

問題

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

1. 関数  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であるとき、次の極限値を  $f'(a)$ ,  $f(a)$  等を用いた式で表せ。

例題 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{af(x) - af(a)\} - \{xf(a) - af(a)\}}{x - a}$$
$$= af'(a) + f(a)$$

問題 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{af(x)\}^2 - \{xf(a)\}^2}{x - a}$$

2. 次の関数  $f(x)$  が  $x = 0$  で連続であるが、微分可能でないことを示せ。

例題  $f(x) = x[x]$       ガウス記号

$$\lim_{h \rightarrow +0} x[x] = 0, \lim_{h \rightarrow -0} x[x] = 0, f(0) = 0$$

$f(x)$  は  $x = 0$  で連続である。

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{(0 + h)[0 + h] - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{(0 + h)[0 + h] - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$
 が存在せず、微分不可能

例題  $f(x) = |x(x - 1)|$       絶対値

3. 次の関数  $f(x)$  の微分係数  $f'(2)$  を定義に従って求めよ。

例題  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f(2+h) - f(2) = \frac{1}{(2+h)+1} - \frac{1}{2+1}$$
$$= \frac{3}{3(h+3)} - \frac{h+3}{3(h+3)} = \frac{-h}{3(h+3)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{3(h+3)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{9}$$

問題  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

4. 次の関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を定義に従って求めよ。

例題  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)+1} - \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{x+1}{(x+h+1)(x+1)} - \frac{x+h+1}{(x+h+1)(x+1)}$$
$$= \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

問題  $f(x) = \frac{1}{x-1}$