数学Ⅲ　微分係数と導関数 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1． 関数 $f(x)$が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$, $f(a)$ を用いた式で表せ。

When the function $f(x)$ is differentiable at $x=a$, express the following limit value using $f'(a)$, $f(a)$.

例題① $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times(-3)=-3f'(a)$

問題① $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$

例題② $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=3f'(a)-\{-f'(a)\}=4f'(a)$

問題② $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{h}$

2． 次の関数 $f(x)$の微分係数 $f'(1)$を定義に従って求めよ。

Find the differential coefficient $f'(1)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題 $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

$\displaystyle f(1+h)-f(1)=\frac{1}{2(1+h)+1}-\frac{1}{2\times 1+1}$

$\displaystyle =\frac{3}{3(2h+3)}-\frac{2h+3}{3(2h+3)}=\frac{-h}{3(2h+3)}$

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{-h}{3(2h+3)}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{9}$

問題 $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

3． 次の関数 $f(x)$の導関数 $f'(x)$を定義に従って求めよ。

Find the derivative $f'(x)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題 $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

$\displaystyle f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2(x+h)+1}-\frac{1}{2x+1}$

$\displaystyle =\frac{2x+1}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}-\frac{2(x+h)+1}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}$

$\displaystyle =\frac{-h}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}$

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{-h}{\{2(x+h)+1\}(2x+1)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{(2x+1)^2}$

問題① $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

例題② $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle f(x+h)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$

$\displaystyle =\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$

$\displaystyle =\frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}\times\frac{1}{h}$

$\displaystyle =\frac{-1}{2\left(\sqrt{x}\right)^3}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

問題② $f(x)=\sqrt{x}$

数学Ⅲ　微分係数と導関数 ② 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　　)

1．関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$, $f(a)$ 等を用いた式で表せ。

When the function $f(x)$ is differentiable at $x=a$, express the following limit value using $f'(a)$, $f(a)$.

例題①　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(a)-x^3 f(x)}{x-a}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(-x^3)=-x^3 f'(a)$

問題①　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a)-x^2 f(x)}{x-a}$

例題②　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(x)-a^3 f(x)}{x-a}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)f(x)}{x-a}=3a^2 f(a)$

問題②　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^2 f(x)-a^2 f(x)}{x-a}$

例題③　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(a)-a^3 f(x)}{x-a}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{x^3 f(a)-x^3 f(x)+x^3 f(x)-a^3 f(x)}{x-a}$

$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(a)-x^3 f(x)}{x-a}=a^3 f'(a)$

$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(x)-a^3 f(x)}{x-a}=3a^2 f(a)$

よって $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^3 f(a)-a^3 f(x)}{x-a}=-a^3 f'(a)+3a^2 f(a)$

問題③　$\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a)-a^2 f(x)}{x-a}$

2．次の関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(1)$ を定義に従って求めよ。

Find the differential coefficient $f'(1)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^3}$

$\displaystyle f(1+h)-f(1)=\frac{1}{(1+h)^3}-\frac{1}{1^3}$

$\displaystyle =\frac{1}{(1+h)^3}-\frac{1^3+3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3}=-\frac{3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3}$

$\displaystyle f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\left(-\frac{3h+3h^2+h^3}{(1+h)^3}\right)\times\frac{1}{h}=-3$

問題　$\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^2}$

3．次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って求めよ。

Find the derivative $f'(x)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^2}$

$\displaystyle f(x+h)-f(x)=\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}$

$\displaystyle =\frac{x^2}{x^2(x+h)^2}-\frac{x^2+2xh+h^2}{x^2(x+h)^2}=-\frac{2hx+h^2}{x^2(x+h)^2}$

$\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\displaystyle =\lim_{h\to 0}\left(-\frac{2hx+h^2}{x^2(x+h)^2}\right)\times\frac{1}{h}=-\frac{2}{x^3}$

問題　$\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^3}$　　※$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

数学Ⅲ　微分係数と導関数 ③ 課題　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$, $f(a)$ 等を用いた式で表せ。

When the function $f(x)$ is differentiable at $x=a$, express the following limit value using $f'(a)$, $f(a)$.

例題

$$\lim_{h\to 0}\frac{a\,f(x)-x\,f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{a\,f(x)-a\,f(a)\}-\{x\,f(a)-a\,f(a)\}}{x-a}$$

$$=a\,f'(a)+f(a)$$

問題

$$\lim_{h\to 0}\frac{\{a\,f(x)\}^2-\{x\,f(a)\}^2}{x-a}$$

2. 次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるが，微分可能でないことを示せ。

Show that the following function $f(x)$ is continuous at $x=0$, but is not differentiable.

例題　$f(x)=x[x]$　　ガウス記号

$$\lim_{h\to +0}x[x]=0\ ,\ \lim_{h\to -0}x[x]=0\ ,\ f(0)=0$$

$f(x)$ は $x=0$ で連続である。continuous

$$\lim_{h\to +0}\frac{(0+h)[0+h]-0}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{(0+h)[0+h]-0}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$ が存在せず，微分不可能

not exist　not differentiable

例題　$f(x)=|x(x-1)|$　　絶対値

3. 次の関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(2)$ を定義に従って求めよ。

Find the differential coefficient $f'(2)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$f(2+h)-f(2)=\frac{1}{(2+h)+1}-\frac{1}{2+1}$$

$$=\frac{3}{3(h+3)}-\frac{h+3}{3(h+3)}=\frac{-h}{3(h+3)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{3(h+3)}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{9}$$

問題　$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

4. 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義に従って求めよ。

Find the derivative $f'(x)$ of the following function $f(x)$ according to the definition.

例題　$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{(x+h)+1}-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{x+1}{(x+h+1)(x+1)}-\frac{x+h+1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$=\frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

問題　$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$