数学Ⅲ　関数の連続性 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次の関数の連続性を調べよ。
Check the continuity of the following function.

例題	問題
① $f(x)=\sqrt{x+1}$ $f(x)$の定義域は domain $x \geqq -1$ $\lim\limits_{x\to -1+0}\sqrt{x+1}=0$ $f(-1)=\sqrt{0}=0$ $f(x)=\sqrt{x+1}$ は $x \geqq -1$ で連続である。 continuous	① $f(x)=\sqrt{1-x}$
② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ $f(x)$の定義域は domain すべての実数 all real numbers $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$ $f(1)=1$ より $f(x)$ は $x=1$ で不連続 discontinuous である。	② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$

2. 次の関数の $x=0$ での連続性を調べよ。
Check the continuity of the following function at $x=0$.

例題	問題
$f(x)=[\,2x\,]$ ガウス記号 $[\,x\,]$ は x を超えない 最大の整数 Largest integer not greater than x $\lim\limits_{x\to -0}[\,2x\,]=-1$ $\lim\limits_{x\to +0}[\,2x\,]=1$ $f(x)=[\,2x\,]$ は $x=0$ で不連続 discontinuous である。	$f(x)=[\,-x\,]$

3. 次の関数が $x=1$ で連続になるように定数 a の値を定めよ。
Find the value of the constant a so that the following function is continuous at x=1.

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)(x+1)$ $=4$ $x=1$で連続になる条件 は $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ $f(1)=a$ より $a=4$	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$

4. 次の方程式が $2<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。
Show that the following equation has at least one real solution in the range $2<x<3$.

例題	問題
$2^x-x-4=0$ $f(x)=2^x-x-4$ とおくと，$f(x)$ は 閉区間 $[\,2\,,3\,]$ で連続 closed interval　continuous $f(2)=-1$ $f(3)=1$ 中間値の定理により intermediate value theorem $f(x)=0$ は $2<x<3$ の 範囲に少なくとも1つの 実数解をもつ	$3^x-5x-4=0$

数学Ⅲ　関数の連続性 ②　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の関数の連続性を調べよ。

例題	問題
① $f(x)=\sqrt{4-x}$ $f(x)$の定義域は $x \leqq 4$ $\displaystyle\lim_{x\to 4+0}\sqrt{4-x}=0$ $f(4)=\sqrt{0}=0$ $f(x)=\sqrt{4-x}$ は $x \leqq 4$ で連続である。	① $f(x)=\sqrt{x-4}$
② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ $f(x)$の定義域は すべての実数 $\displaystyle\lim_{x\to -0}f(x)=-1$ $\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=1$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$が存在しない。 $f(x)$ は $x=0$ で不連続 である。	② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

2．次の関数の $x=0$ での連続性を調べよ。

例題	問題
$f(x)=x[x]$ ガウス記号 $[x]$ は x を超えない 最大の整数 $\displaystyle\lim_{x\to -0}x[x]=0\times(-1)=0$ $\displaystyle\lim_{x\to +0}x[x]=0\times 0=0$ $f(0)=0$ より $f(x)$ は $x=0$ で連続 である。	$f(x)=(x+1)[x]$

3．次の関数が $x=-1$ で連続になるように定数 a の値を定めよ。

例題	問題
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$ $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x+1}$ $\displaystyle=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x+1}$ $\displaystyle=\lim_{x\to -1}(x^2+1)(x-1)$ $=-4$ $x=-1$ で連続になる 条件 は $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$ $f(-1)=a$ より $a=-4$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$

4．次の方程式が $2<x<3$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

例題	問題
$2x^2-5x+1=0$ $f(x)=2x^2-5x+1$ とおくと，$f(x)$ は 閉区間 $[2,3]$ で連続 $f(2)=-1$ $f(3)=4$ 中間値の定理により $f(x)=0$ は $2<x<3$ の 範囲に少なくとも1つの 実数解をもつ	$x^2-3x+1=0$

数学Ⅲ　関数の連続性 ③ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の関数の関数が連続である区間を求めよ。

例題	問題
① $f(x)= x^3 - 7x^2 + 1$ すべての実数 $(-\infty, \infty)$	① $f(x)= x^2 + 2x + 1$
② $f(x)= 2\log x$ $x > 0$ $(0, \infty)$	② $f(x)= \log x^2$
③ $f(x)=\sqrt{4-x}$ $-\infty < x \leqq 4$ $(-\infty, 4]$	③ $f(x)=\sqrt{x-4}$
④ $f(x)= \dfrac{x}{x-1}$ $x < 1,\ 1 < x$ $(-\infty, 1),(1, -\infty)$	④ $f(x)= \dfrac{1}{x-2}$

2．次の関数 $f(x)$ の連続性を調べよ。

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$ $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ は $x\neq 1$ で連続である。 $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(2)$ $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ において連続である。	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq2) \\ 4 & (x=2) \end{cases}$

3．次の関数がすべての実数において連続になるように定数 a の値を定めよ。

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & (x\neq1) \\ a & (x=1) \end{cases}$ $\dfrac{x^4-1}{x-1}$ は $x\neq1$ で連続 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}$ $\displaystyle=\lim_{x\to1}(x^3+x^2+x+1)$ $=4$ $x=1$ で連続になる 条件 は $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(1)$ $f(1)=a$ より $a=4$ $a=4$のとき，すべての実数において連続になる。	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & (x\neq1) \\ a & (x=1) \end{cases}$

4．次の方程式が $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

例題	問題
$x - 2\cos x = 0$ $f(x) = x - 2\cos x$ とおく。 $f(x)$ は閉区間 $[0, \pi]$ で連続である。 $f(0) = -1 < 0$ $f(\pi) = \pi + 2 > 0$ 中間値の定理により $f(x)=0$ は $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ	$3\cos x - x = 0$