数学Ⅲ　関数の連続性 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1. 次の関数の連続性を調べよ。

Check the continuity of the following function.

例題	問題
① $f(x)=\sqrt{x+1}$ $f(x)$ の定義域は (domain) $x \geqq -1$ $\lim\limits_{x\to -1+0}\sqrt{x+1}=0$ $f(-1)=\sqrt{0}=0$ $f(x)=\sqrt{x+1}$ は $x \geqq -1$ で連続である。(continuous)	① $f(x)=\sqrt{1-x}$
② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ $f(x)$ の定義域は (domain) すべての実数 (all real numbers) $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$ $f(1)=1$ より $f(x)$ は $x=1$ で不連続 (discontinuous) である。	② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ 2 & (x=2) \end{cases}$

2. 次の関数の $x=0$ での連続性を調べよ。

Check the continuity of the following function at $x=0$.

例題	問題
$f(x)=[\,2x\,]$ ガウス記号 $[\,x\,]$ は x を超えない 最大の整数 Largest integer not greater than x $\lim\limits_{x\to -0}[\,2x\,]=-1$ $\lim\limits_{x\to +0}[\,2x\,]=1$ $f(x)=[\,2x\,]$ は $x=0$ で不連続 (discontinuous) である。	$f(x)=[\,-x\,]$

3. 次の関数が $x=1$ で連続になるように定数 a の値を定めよ。

Determine the value of the constant a so that the following function is continuous at $x=1$.

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)(x+1)$ $=4$ $x=1$ で連続になる条件 は $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ $f(1)=a$ より $a=4$	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$

4. 次の方程式が $2<x<3$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

Show that the following equation has at least one real solution in the range $2<x<3$.

例題	問題
$2^x-x-4=0$ $f(x)=2^x-x-4$ とおくと，$f(x)$ は 閉区間 $[\,2,3\,]$ で連続 closed interval　continuous $f(2)=-1$ $f(3)=1$ 中間値の定理により intermediate value theorem $f(x)=0$ は $2<x<3$ の 範囲に少なくとも1つの 実数解をもつ	$3^x-5x-4=0$

数学Ⅲ　関数の連続性 ② 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1． 次の関数の連続性を調べよ。

Check the continuity of the following function.

例題	問題
① $f(x)=\sqrt{4-x}$ $f(x)$ の定義域は $x \leqq 4$ domain $\lim\limits_{x\to 4+0}\sqrt{4-x}=0$ $f(4)=\sqrt{0}=0$ $f(x)=\sqrt{4-x}$ は $x \leqq 4$ で連続である。 continuous	① $f(x)=\sqrt{x-4}$
② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$ $f(x)$ の定義域は domain すべての実数 all real numbers $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ が存在しない。 not exist $f(x)$ は $x=0$ で不連続 discontinuous である。	② $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

2． 次の関数の $x=0$ での連続性を調べよ。

Check the continuity of the following function at x=0.

例題	問題
$f(x)=x[x]$ ガウス記号 $[x]$ は x を超えない最大の整数 $\lim\limits_{x\to -0} x[x]=0\times(-1)=0$ $\lim\limits_{x\to +0} x[x]=0\times 0=0$ $f(0)=0$　より $f(x)$ は $x=0$ で連続 continuous である。	$f(x)=(x+1)[x]$

3． 次の関数が $x=-1$ で連続になるように定数 a の値を定めよ。

Determine the value of the constant a so that the following function is continuous at $x=-1$.

例題	問題
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x+1}$ $=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x+1}$ $=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)(x-1)$ $=-4$ $x=-1$ で連続になる continuous 条件は $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ condition $f(-1)=a$　より $a=-4$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & (x\neq -1)\\ a & (x=-1)\end{cases}$

4． 次の方程式が $2<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

Show that the following equation has at least one real solution in the range $2<x<3$.

例題	問題
$2x^2-5x+1=0$ $f(x)=2x^2-5x+1$ とおくと，$f(x)$ は 閉区間 $[2, 3]$ で連続 continuous $f(2)=-1$ $f(3)=4$ 中間値の定理により intermediate value theorem $f(x)=0$ は $2<x<3$ の 範囲に少なくとも 1 つの at least one 実数解をもつ real solution	$x^2-3x+1=0$

数学Ⅲ　関数の連続性 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　　　)

1. 次の関数の関数が連続である区間を求めよ。
Find the interval over which the following function is continuous.

例題	問題
① $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1$ すべての実数 $(-\infty, \infty)$	① $f(x) = x^2 + 2x + 1$
② $f(x) = 2\log x$ $x > 0$ $(0, \infty)$	② $f(x) = \log x^2$
③ $f(x) = \sqrt{4 - x}$ $-\infty < x \leqq 4$ $(-\infty, 4]$	③ $f(x) = \sqrt{x - 4}$
④ $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ $x < 1$, $1 < x$ $(-\infty, 1), (1, -\infty)$	④ $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

2. 次の関数 $f(x)$ の連続性を調べよ。
Check the continuity of the following function $f(x)$.

例題	問題
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$ $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x \neq 1$ で 連続である。 continuous $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(2)$ $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ において連続である。 continuous	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & (x \neq 2) \\ 4 & (x = 2) \end{cases}$

3. 次の関数がすべての実数において連続になるように定数 a の値を定めよ。
Determine the value of constant a so that the following function is continuous in all real numbers.

例題	問題
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$ $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ は $x \neq 1$ で連続 continuous $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ $= \displaystyle\lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1)$ $= 4$ $x = 1$ で連続になる continuous 条件は $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = f(1)$ condition $f(1) = a$ より $a = 4$ $a = 4$ のとき，すべての実数 all real numbers において連続になる。 continuous	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ a & (x = 1) \end{cases}$

4. 次の方程式が $0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。
Show that the following equation has at least one real solution in the range $0 < x < \pi$.

例題	問題
$x - 2\cos x = 0$ $f(x) = x - 2\cos x$ とおく。 $f(x)$ は閉区間 $[0, \pi]$ で連続である。 continuous $f(0) = -1 < 0$ $f(\pi) = \pi + 2 > 0$ 中間値の定理により intermediate value theorem $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の 範囲に少なくとも1つの at least one 実数解をもつ real solution	$3\cos x - x = 0$