

数学Ⅲ 三角関数の極限 ① 課題

()年()組()番()

1. 次の文章の [] を埋めて、説明を完成せよ。

Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

① 弧度法 arc method

半径 1 の円において、長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを [] ラジアンといい、これを単位とする角の表し方を [] という。※ラジアンは省略

半径 1 の円の円周の長さは [] π であるから、弧度法での円の中心角は [] π である。

② 扇形の面積 S_0 (半径 r , 中心角 x)

半径 r の円の面積は π [] になる。

扇形の面積 S_0 は中心角 x に比例するので

$S_0 : \pi$ [] $= x : \pi$

よって $S_0 =$ [] になる。

③ 二等辺三角形の面積 S_2 (2 辺 r , 中心角 x)

$S_2 =$ []

④ 直角三角形の面積 S_R (底辺 r , 底角 $x \neq 90^\circ$)

高さ $h =$ [] より

$S_R =$ []

⑤ $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 S_0, S_2, S_R の大小関係より

[] $<$ [] $<$ []

よって、[] $< x <$ []

各辺を $\sin x > 0$ で割ると

[] $<$ [] $<$ []

逆数を取り

[] $>$ [] $>$ []

はさみうちの原理により Principle of scissors

$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x =$ [] より $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} =$ []

2. 次の式の極限を求めよ。

Find the limit of the following expression.

例題	問題
① $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$ $= 0$	① $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$
② $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ $= 0$	② $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$
③ $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ $0 \leq \left \sin \frac{1}{x} \right \leq 1$ より $0 \leq \left x \sin \frac{1}{x} \right \leq x $ $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ より $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$	③ $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$
④ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ $0 \leq \sin x \leq 1$ より $0 \leq \left \frac{\sin x}{x} \right \leq \frac{1}{ x }$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ x } = 0$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$	④ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$
⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2 \right)$ $= 2$	⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

数学Ⅲ 三角関数の極限 ② 課題

()年()組()番()

1. 次の文章の [] を埋めて、説明を完成せよ。
Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

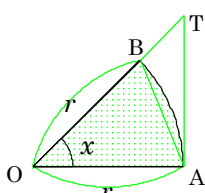
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、半径 r 、中心角 x の扇形 OAB を作り、点 A における円の接線と直線 OB と交わる点を T とする。

面積の大小を考えると

$\triangle OAB$

扇形 OAB

$\triangle OAT$



$\frac{1}{2}r^2$

$< \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2$

この式を [] で割ると $\sin x < x < \tan x$

さらに $\sin x > 0$ で割ると $< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

逆数をとると $> \frac{\sin x}{x} > \cos x$

ここで $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x =$ [] より $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} =$ []

$x \rightarrow -0$ のときは $x = -t$ とおくと、 $t \rightarrow$ [] より

$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} =$ []

2. 次の極限を求めよ。 Find the limit of the following expression.

例題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

問題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$

例題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 = 2$

問題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

例題③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\sin 5x} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

問題③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

3. 次の極限值を求めよ。 Find the limit of the following expression.

例題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1$

問題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$

例題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{x}{1 + \cos x} = 0$

問題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

問題③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

数学Ⅲ 三角関数の極限 ③ 課題

1. 次の文章の [] を埋めて、説明を完成せよ。
Fill in the blanks in the following sentences to complete the explanation.

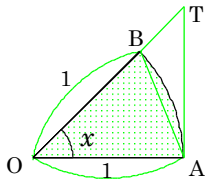
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、半径 1 、中心角 x の扇形 OAB を作り、点 A における円の接線と直線 OB と交わる点を T とする。

面積の大小を考えると

$\triangle OAB$

扇形 OAB

$\triangle OAT$



$\frac{1}{2} \times 1^2 \times$ $< \frac{1}{2}$ $< \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$

この式を [] で割ると $\sin x < x < \tan x$

さらに $\sin x > 0$ で割ると $< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

逆数をとると $> \frac{\sin x}{x} > \cos x$

ここで $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x =$ [] より $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} =$ []

$x \rightarrow -0$ のときは $x = -t$ とおくと、 $t \rightarrow$ [] より

$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} =$ []

2. 次の極限を求めよ。 Find the limit of the following expression.

例題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 = 3$

問題① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

例題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

問題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

例題③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ $t = \frac{1}{x}$ とおくと

$= \lim_{t \rightarrow +0} \sin t = 0$

問題③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

() 年 () 組 () 番 ()

3. 次の極限值を求めよ。 Find the limit of the following expression.

例題① $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ より $0 \leq \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2$

$x \rightarrow 0$ のとき、 $x^2 \rightarrow 0$ であるから

$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

問題① $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

例題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times (1 + \cos x) = 2$

問題② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x}$

問題③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$

1. 次の極限を求めよ。Find the next limit.

2. 次の極限を求めよ。Find the next limit.

半径 1 の円 O の円周上に
中心角 x ラジアン の弧 AB
をとり、弧 AB を 2 等分す
る点を C とする。
線分 OC と弦 AB との交点
を D とする。

例題 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2}$ を求めよ。

OD は弦 AB の垂直二等分線であるから

$$\angle AOD = \frac{x}{2}$$
$$\sin \frac{x}{2} = AD, \quad AB = 2AD = 2 \sin \frac{x}{2}$$
$$\cos \frac{x}{2} = OD$$
$$CD = OC - OD = 1 - \cos \frac{x}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{4 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{4 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{8}$$

問題 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{CD}{AB^2}$ を求めよ。

半径 1 の円 O の円周上に
定点 A と動点 P がある。
A における接線に P から
垂線 PH を下ろす。
A における接線上に
 $AQ = AP$ である点 Q を
OA と同じ側にとる。
 $\angle AOP$ を x ラジアンとする。

例題 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\widehat{PA}}{PA}$ を求めよ。

弦 AP の垂直二等分線と弦 AP の交点を B とする。

$$\angle AOB = \frac{x}{2}$$
$$\sin \frac{x}{2} = AB, \quad PA = 2AB = 2 \sin \frac{x}{2}$$

\widehat{PA} は弧 PA の長さだから $\widehat{PA} = 1 \times x = x$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\widehat{PA}}{PA}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \times \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = 1$$

問題① 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{AH^2}{PH}$ を求めよ。

問題② 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\widehat{PA}^2}{PQ}$ を求めよ。