



1. 次の文章の□を埋めて、説明を完成せよ。

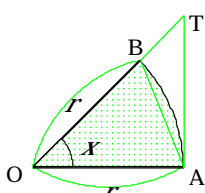
$0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、半径  $r$ 、中心角  $x$  の扇形  $OAB$  を作り、点  $A$  における円の接線と直線  $OB$  と交わる点を  $T$  とする。

面積の大小を考えると

OAB

扇形OAB

OAT



$\frac{1}{2} r^2 < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2$

この式を□で割ると  $\sin x < x < \tan x$

さらに  $\sin x > 0$  で割ると  $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

逆数をとると  $\frac{\sin x}{x} > \cos x$

ここで  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  より  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \rightarrow 0$  のときは  $x = -t$  とおくと、 $t \rightarrow 0$  より

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

2. 次の極限を求めよ。

例題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$

例題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 = 2$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

例題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\sin 5x} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

3. 次の極限值を求めよ。

例題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$

例題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{x}{1 + \cos x} = 0$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

問題

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

1. 次の文章の□を埋めて、説明を完成せよ。

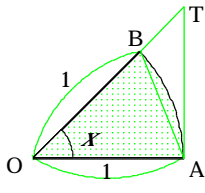
$0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、半径 1、中心角  $x$  の扇形 OAB を作り、点 A における円の接線と直線 OB と交わる点を T とする。

面積の大小を考えると

OAB

扇形OAB

OAT



$\frac{1}{2} \times 1^2 \times x < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$

この式を□で割ると  $\sin x < x < \tan x$

さらに  $\sin x > 0$  で割ると  $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

逆数をとると  $\frac{\sin x}{x} > \cos x$

ここで  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  より  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \rightarrow 0$  のときは  $x = -t$  とおくと、 $t \rightarrow 0$  より

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

2. 次の極限を求めよ。

例題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 = 3$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

例題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

例題  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$   $t = \frac{1}{x}$  とおくと

$= \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

3. 次の極限值を求めよ。

例題  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$  より  $0 \leq \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2$

$x \rightarrow 0$  のとき、 $x^2 \rightarrow 0$  であるから

$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = 0$  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

例題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$

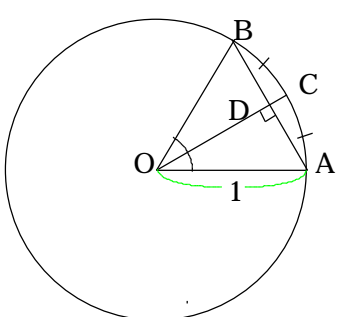
$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \times (1 + \cos x) = 2$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x}$

問題  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$

1. 次の極限を求めよ。

半径 1 の円 O の円周上に  
中心角  $x$  ラジアン の弧 AB  
をとり、弧 AB を 2 等分する  
点を C とする。  
線分 OC と弦 AB との交点  
を D とする。



例題 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{CD}{AB^2}$  を求めよ。

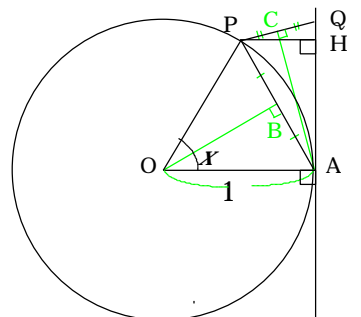
OD は弦 AB の垂直 2 等分線であるから

$$AOD = \frac{x}{2}$$
$$\sin \frac{x}{2} = AD, \quad AB = 2AD = 2 \sin \frac{x}{2}$$
$$\cos \frac{x}{2} = OD$$
$$CD = OC - OD = 1 - \cos \frac{x}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{CD}{AB^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{4 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{8}$$

問題 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{CD}{AB^2}$  を求めよ。

2. 次の極限を求めよ。

半径 1 の円 O の円周上に  
定点 A と動点 P がある。  
A における接線に P から  
垂線 PH を下ろす。  
A における接線上に  
AQ = AP である点 Q を  
OA と同じ側にとる。  
AOP を  $x$  ラジアン とする。



例題 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widehat{PA}}{PA}$  を求めよ。

弦 AP の垂直 2 等分線と弦 AP の交点を B とする。

$$AOB = \frac{x}{2}$$
$$\sin \frac{x}{2} = AB, \quad PA = 2AB = 2 \sin \frac{x}{2}$$

$\widehat{PA}$  は弧 PA の長さだから  $\widehat{PA} = 1 \times x = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widehat{PA}}{PA}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = 1$$

問題 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{AH^2}{PH}$  を求めよ。

問題 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widehat{PA}^2}{PQ}$  を求めよ。