

1. 次の無限級数の和を求めよ。
Find the sum of the following infinite series.

例題

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

第 n 項は $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) +$$
$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$

問題

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$$

2. 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときは，その和を求めよ。
Examine the convergence and divergence of the following infinite geometric series, and when it converges, find the sum.

例題	問題
① 初項 3, 公比 $\frac{1}{4}$ $\left \frac{1}{4} \right < 1$ より 収束する。その和は $\frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$	① 初項 2, 公比 $-\frac{1}{3}$
② 初項 2, 公比 $\sqrt{2}$ $\left \sqrt{2} \right > 1$ より 発散する。	② 初項 1, 公比 $-\sqrt{3}$

3. 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，その和を求めよ。
Find the range of values of x such that the following infinite geometric series converges. Also, find the sum.

例題 $x + x(x+1) + x(x+1)^2 + x(x+1)^3 + \cdots$

初項が x ，公比 $(x+1)$ であるから，収束するための
必要十分条件は $x=0$ または $\left| x+1 \right| < 1$
 $\left| x+1 \right| < 1$ より $-1 < x+1 < 1$
したがって $-2 < x < 0$
求める x の値の範囲は $-2 < x \leq 0$
 $x=0$ のとき，和は 0
 $-2 < x < 0$ のとき和は $\frac{x}{1-(x+1)} = -1$

問題 $1 + (x+2) + (x+2)^2 + (x+2)^3 + \cdots$

1. 次の無限級数の和を求めよ。
Find the sum of the following infinite series.

例題 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots$

第 n 項は $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

問題 $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$

2. 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときは，その和を求めよ。

Examine the convergence and divergence of the following infinite geometric series, and when it converges, find the sum.

例題	問題
<p>① 初項 2, 公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$</p> <p>$\left \frac{1}{\sqrt{2}} \right < 1$ より</p> <p>収束する。その和は</p> <p>convergence sum</p> $\frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$ <p>$= 4 + 2\sqrt{2}$</p>	<p>① 初項 2, 公比 $\frac{1}{\sqrt{3}}$</p>
<p>② 初項 2, 公比 $-\sqrt{2}$</p> <p>$\left -\sqrt{2} \right > 1$ より</p> <p>発散する。</p> <p>divergence</p>	<p>② 初項 2, 公比 $\sqrt{3}$</p>

3. 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

Find the range of values of x such that the following infinite geometric series converges. Also, find the sum.

例題 $x + x(x^2-1) + x(x^2-1)^2 + x(x^2-1)^3 + \cdots$

初項が x , 公比 (x^2-1) であるから，収束するための

必要十分条件は $x=0$ または $\left| x^2-1 \right| < 1$

$$\left| x^2-1 \right| < 1 \quad \text{より} \quad -1 < x^2-1 < 1$$

$$\begin{cases} x^2-1 < 1 & \text{より} & x^2 < 2, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ x^2-1 > -1 & \text{より} & x^2 > 0, & x < 0 \text{ または } x > 0 \end{cases}$$

よって求める範囲は $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

問題 $1 + (1-x^2) + (1-x^2)^2 + (1-x^2)^3 + \cdots$

数学Ⅲ 無限級数 ③ 課題

1. 次の無限級数の和を求めよ。

Find the sum of the following infinite series.

例題 $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \frac{3}{11 \cdot 14} + \dots$

$$\text{第 } n \text{ 項は } \frac{3}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots$$

()年()組()番()

2. 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するとき，その和を求めよ。

Examine the convergence and divergence of the following infinite geometric series, and when it converges, find the sum.

れいだい 例題	もんだい 問題
<p>① 初項 1, 公比 $\frac{2}{\sqrt{3}}$</p> <p>$\left \frac{2}{\sqrt{3}} \right > 1$ より</p> <p>はっさん 発散する。 divergence</p>	<p>① 初項 1, 公比 $\frac{3}{\sqrt{5}}$</p>
<p>② 初項 1, 公比 $\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>$\left \frac{\sqrt{3}}{2} \right < 1$ より</p> <p>しゅうそく 収束する。その和は convergence sum</p> <p>$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>$= 4 + 2\sqrt{3}$</p>	<p>② 初項 1, 公比 $\frac{\sqrt{5}}{3}$</p>

3. 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲と, その和を求めよ。

Find the range of values of x such that the following infinite geometric series converges. Also, find the sum.

例題 $1 + (2-x) + (2-x)^2 + (2-x)^3 + \cdots$

初項が1，公比 $(2-x)$ であるから，収束するための

必要十分条件は $|2-x| < 1$

$$\left| 2-x \right| < 1 \quad \text{より} \quad -1 < 2-x < 1$$

$$1 > x - 2 > -1 \quad , \quad 1 < x < 3$$

その^わ和は $\frac{1}{1-(2-x)} = \frac{1}{x-1}$

$1 < x < 3$ のとき, $\overset{\text{しゅうそく}}{\text{convergence}}$ し, $\overset{\text{わ}}{\text{sum}}$ その和は $\frac{1}{x-1}$

問題 $1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots$

1. 次の点 P が近づいていく点の座標を求めよ。
Find the coordinates of the point that the next point P approaches.

例題 数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み、次に負の向きに $-\frac{2}{3}$ 進み、さらに正の向きに $-\frac{2^2}{3^2}$ 進む。このように正・負の移動を限りなく続けるとき、点 P が近づいていく点の座標を求めよ。
Find the coordinates of the point that point P approaches.

点 P の座標は、順に次のようになる。
 $1, 1 - \frac{2}{3}, 1 - \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2}, 1 - \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3}$
初項 $a = 1$ 、公比 $r = -\frac{2}{3}$ の無限等比級数である。
 $-1 < r < 1$ であるから収束し、その和は
$$\frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

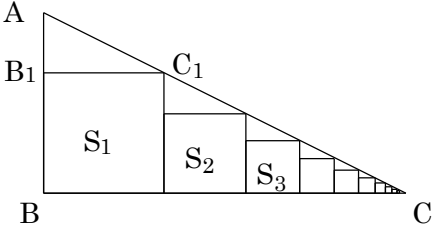
点 P が近づいていく点の座標は $\frac{3}{5}$

問題 ① 数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み、次に負の向きに $-\frac{3}{4}$ 進み、さらに正の向きに $-\frac{3^2}{4^2}$ 進む。このように正・負の移動を限りなく続けるとき、点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

問題 ② 数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み、次に正の向きに $\frac{1}{2}$ 進み、さらに正の向きに $\frac{1}{2^2}$ 進む。このように正の移動を限りなく続けるとき、点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

2. 次の図形について答えよ。 Answer about the next figure.

例題 $AB = 4, BC = 8, \angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 S_1, S_2, \dots をおく。この正方形の面積の和を求めよ。
Find the sum of the areas of the squares.



S_1 の1辺の長さを x_1 とすると、 $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$
 $4 - x_1 : x_1 = 4 : 8 \quad \therefore x_1 = \frac{8}{3}$
 S_2 の1辺の長さを x_2 とすると、
 $4 : \frac{8}{3} = \frac{8}{3} : x_2 \quad \therefore x_2 = \frac{16}{9}$
辺の長さの相似比は $\frac{8}{3} \div 4 = \frac{2}{3}$

面積の相似比は $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

S_1 の面積は $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

正方形の面積の総和は $\frac{\frac{16}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{16}{5}$

問題 $AB = 4, BC = 4, \angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 S_1, S_2, \dots をおく。この正方形の面積の和を求めよ。

1. 次の点 P が近づいていく点の座標を求めよ。
Find the coordinates of the point that the next point P approaches.

例題 座標平面上で点 P が原点 O から x 軸方向に
進み, 次に 90° 回転して $\frac{1}{2}$ 進み, さらに
 90° 回転して $\frac{1}{2^2}$ 進む。このように回転し
て移動を限りなく続けるとき, 点 P が近づい
ていく点の座標を求めよ。

点 P の座標は, 順に次のようになる。

$(1, 0), (1, \frac{1}{2}), (1-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (1-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{8}), \dots$

x 座標は, 初項 1 , 公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数より
収束し, その和は $\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$

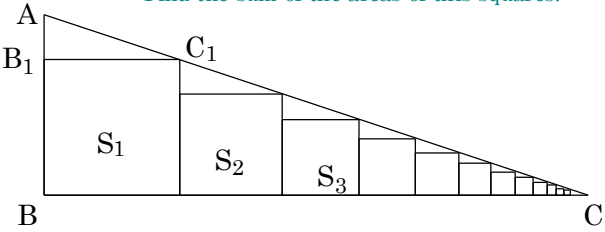
y 座標は, 初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数より
収束し, その和は $\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$

点 P が近づいていく点の座標は $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

問題 座標平面上で点 P が原点 O から y 軸方向に
進み, 次に -90° 回転して $\frac{2}{3}$ 進み, さらに
 -90° 回転して $\frac{2^2}{3^2}$ 進む。このように回転し
て移動を限りなく続けるとき, 点 P が近づい
ていく点の座標を求めよ。

2. 次の図形について答えよ。 Answer about the next figure.

例題 $AB = 4, BC = 12, \angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形
の内部に辺 BC に接するように正方形 S_1, S_2, \dots
をおく。この正方形の面積の和を求めよ。
Find the sum of the areas of this squares.



S_1 の1 辺の長さを x_1 とすると, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$

$4 - x_1 : x_1 = 4 : 12 \quad \therefore x_1 = 3$

S_2 の1 辺の長さを x_2 とすると,

$4 : 3 = 3 : x_2 \quad \therefore x_2 = \frac{9}{4}$

辺の長さの相似比は $\frac{9}{4} \div 3 = \frac{3}{4}$

面積の相似比は $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$

S_1 の面積は $3^2 = 9$

正方形の面積の総和は $\frac{9}{1-\frac{9}{16}} = \frac{144}{7}$

問題 $AB = 4, BC = 6, \angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形
の内部に辺 BC に接するように正方形 S_1, S_2, \dots
をおく。この正方形の面積の和を求めよ。