

1. 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。
Find the limit of the sequence whose nth term is expressed by the following formula.

3. 次の極限を求めよ。
Find the next limit value.

| 例題 | 問題 |
|---|---|
| ① 数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ $\sqrt{2} > 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = \infty$ | ① 数列 $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right\}$ |
| ② 数列 $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ $\left \frac{3}{4}\right < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ | ② 数列 $\{(-\sqrt{3})^n\}$ |
| ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ $-\frac{4}{3} < -1$ より 振動する vibrate | ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ |
| ④ 数列 $\left\{\left(\frac{3}{3}\right)^n\right\}$ $\frac{3}{3} = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{3}\right)^n = 1$ | ④ 数列 $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ |

2. 次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また、そのときの極限値を求めよ。
Find the range of x values such that the following sequence converges.
Also, find the limit value at that time.

| 例題 | 問題 |
|---|--|
| 数列 $\{(x+1)^n\}$ 収束するための 必要十分条件は $-1 < x+1 \leq 1$ すなわち $-2 < x \leq 0$ 極限値は $-2 < x < 0$ のとき 0 $x = 0$ のとき 1 | 数列 $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$ |

| 例題 | 問題 |
|---|---|
| ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ $= 1$ | ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$ |
| ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{4}\right)^n}{1}$ $= 0$ | ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n}{5^n}$ |
| ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}$ $= \infty$ | ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{4^n}$ |

4. 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
Find the limit value of the following sequence $\{a_n\}$.

| | |
|---|--|
| 例題 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$ ※特性方程式 $X = \frac{1}{3}X + 2$ より $X = 3$ 与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3), \quad a_1 - 3 = -2$ よって $a_n - 3 = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ | 問題 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ |
|---|--|

1. 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。
Find the limit of the sequence whose nth term is expressed by the following formula.

| 例題 | 問題 |
|--|--|
| ① 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ $\sqrt{3} > 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$ | ① 数列 $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ |
| ② 数列 $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$ $\left \frac{4}{5}\right < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ | ② 数列 $\{(-\sqrt{2})^n\}$ |
| ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ $\left -\frac{2}{3}\right < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ | ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ |
| ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}$ $-\frac{6}{5} \leq -1$ より しんどう 振動する vibrate | ④ 数列 $\left\{\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right\}$ |

2. 次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また、そのときの極限値を求めよ。
Find the range of x values such that the following sequence converges.
Also, find the limit value at that time.

| 例題 | 問題 |
|---|------------------|
| 数列 $\left\{\left(\frac{x}{4}\right)^n\right\}$ 収束するための 必要十分条件は $-1 < \frac{x}{4} \leq 1$ すなわち $-4 < x \leq 4$ きよくげんち 極限値は limit value $-4 < x < 4$ のとき 0 $x = 4$ のとき 1 | 数列 $\{(x+2)^n\}$ |

3. 次の極限を求めよ。
Find the next limit value.

| 例題 | 問題 |
|---|---|
| ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$ $= 1$ | ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$ |
| ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 4^n}{3^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{4}{3}\right)^n}{1}$ $= -\infty$ | ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{4^n}$ |
| ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{6^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1}$ $= 0$ | ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n}$ |

4. 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
Find the limit value of the following sequence $\{a_n\}$.

| | |
|---|--|
| 例題 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n - 1$ ※特性方程式 $X = \frac{3}{4}X - 1$ より $X = -4$ 与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1} + 4 = \frac{3}{4}(a_n + 4), \quad a_1 + 4 = 5$ よって $a_n + 4 = 5 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 4) = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -4$ | 問題 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - 2$ |
|---|--|

1. 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。
Find the limit of the sequence whose nth term is expressed by the following formula.

| 例題 | 問題 |
|--|--|
| ① 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ $\sqrt{3} > 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$ | ① 数列 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$ |
| ② 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ $\left -\frac{1}{2}\right < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ | ② 数列 $\{(-\sqrt{3})^n\}$ |
| ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ $-\frac{3}{2} < -1$ より しんどう 振動する vibrate | ③ 数列 $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$ |

2. 次の数列の極限を，各場合について求めよ。
Find the range of x values such that the following sequence converges.
Also, find the limit value at that time.

| 例題 | 問題 |
|---|---|
| 数列 $\left\{\frac{r^n}{2-r^n}\right\}$ ① $ r < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2-r^n} = 0$ ② $r = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2-r^n} = 1$ ③ $r < -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2-r^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{r^n} - 1} = -1$ | 数列 $\left\{\frac{2+r^n}{2-r^n}\right\}$ ① $ r < 1$ ② $r = 1$ ③ $r < -1$ |

3. 次の極限を求めよ。
Find the next limit value.

| 例題 | 問題 |
|--|---|
| ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$ $= -1$ | ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n - 2^n}$ |
| ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n - 2^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{4}\right)^n}$ $= \infty$ | ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n - 2^n}$ |
| ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^n}{5^n}$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1}$ $= 0$ | ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3^n}{4^n}$ |

4. 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
Find the limit value of the following sequence $\{a_n\}$.

| | |
|--|--|
| 例題 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1$ ※特性方程式 $X = \frac{3}{4}X + 1$ より $X = 4$ あたえられた漸化式を変形すると $a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4), \quad a_1 - 4 = -2$ よって $a_n - 4 = -2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ | |
| 問題 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 3$ | |

れいだい ① $a_1 = 2, 3 a_{n+1} = 2 a_n + 1$ の極限值を求めよ。
Find the limit value.

とくせいほうていしき
特性方程式より $3 X = 2 X + 1$ より $X = 1$

$3 a_{n+1} = 2 a_n + 1$ は

$a_{n+1} - 1 = \frac{2}{3} (a_n - 1)$ と変形できる

$a_n - 1$ は初項1, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right\} = 1$

れいだい ② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 a_n + 3}$ の極限值を求めよ。
Find the limit value.

$\left(\begin{array}{l} \text{特性方程式より } X = \sqrt{2 X + 3} \\ X^2 - 2 X - 3 = (X - 3)(X + 1) = 0 \\ X > 0 \text{ より } X = 3 \end{array} \right)$

$| a_{n+1} - 3 | < \frac{2}{3} | a_n - 3 |$ を示す。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 3 &= \sqrt{2 a_n + 3} - 3 \\ &= \frac{(\sqrt{2 a_n + 3} - 3)(\sqrt{2 a_n + 3} + 3)}{\sqrt{2 a_n + 3} + 3} \\ &= \frac{2 a_n - 6}{\sqrt{2 a_n + 3} + 3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2 a_n + 3} + 3} (a_n - 3) \end{aligned}$$

ここで, $a_1 = 1$ と $\sqrt{2 a_n + 3} + 3 > 3$ より

$| a_{n+1} - 3 | < \frac{2}{3} | a_n - 3 |$

この漸化式を繰り返すと

$| a_{n+1} - 3 | < \left(\frac{2}{3}\right)^n | a_1 - 3 | = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2$

よって $0 \leq | a_{n+1} - 3 | < \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} | a_{n+1} - 3 | = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ になる。

もんだい ① $a_1 = 3, 5 a_{n+1} = 3 a_n + 2$ の極限值を求めよ。

もんだい ② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3 a_n + 4}$ の極限值を求めよ。

例題① $a_1 = 3, 4 a_{n+1} = 3 a_n + 2$ の極限値を求めよ。
Find the limit value.

特性方程式より $4 X = 3 X + 2$ より $X = 2$

$4 a_{n+1} = 3 a_n + 2$ は

$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{4} (a_n - 2)$ と変形できる。

$a_n - 2$ は初項 1 , 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列である。

$a_n = \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} + 2$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim \left\{ \left(\frac{3}{4} \right)^n + 2 \right\} = 2$

例題② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ の極限値を求めよ。
Find the limit value.

特性方程式より $X = \sqrt{X + 6}$
 $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2) = 0$
 $X > 0$ より $X = 3$

$| a_{n+1} - 3 | < \frac{1}{3} | a_n - 3 |$ を示す。

$a_{n+1} - 3 = \sqrt{a_n + 6} - 3$
 $= \frac{(\sqrt{a_n + 6} - 3)(\sqrt{a_n + 6} + 3)}{\sqrt{a_n + 6} + 3}$
 $= \frac{a_n - 3}{\sqrt{a_n + 6} + 3}$
 $= \frac{1}{\sqrt{a_n + 6} + 3} (a_n - 3)$

ここで, $a_1 = 1$ と $\sqrt{a_n + 6} + 3 > 3$ より

$| a_{n+1} - 3 | < \frac{1}{3} | a_n - 3 |$

この漸化式を繰り返すと

$| a_{n+1} - 3 | < \left(\frac{1}{3} \right)^n | a_1 - 3 | = \left(\frac{1}{3} \right)^n \times 1$

よって $0 \leq | a_{n+1} - 3 | < \left(\frac{1}{3} \right)^n$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} | a_{n+1} - 3 | = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ になる。

問題① $a_1 = 2, 4 a_{n+1} = a_n + 3$ の極限値を求めよ。

問題② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ の極限値を求めよ。

例題① $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} + 1$ のとき、
 $0 < a_n < 3$ を示せ。

[1] $n = 1$ のとき $0 < a_1 = 1 < 3$

[2] $n = k$ のとき $0 < a_k < 3$ とすると

$$3 - a_{k+1} = 3 - (\sqrt{a_k + 1} + 1) = 2 - \sqrt{a_k + 1}$$
$$1 < \sqrt{a_k + 1} < 2 \text{ より } 3 - a_{k+1} > 0$$

明らかに $a_{k+1} > 0$ であるから

$$n = k + 1 \text{ のときも } 0 < a_{k+1} < 3 \text{ が成り立つ。}$$

[1], [2]より、 $0 < a_n < 3$ が成り立つ。

例題② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} + 1$ のとき、
 a_n の極限値を求めよ。
Find the limit value.

特性方程式より $X = \sqrt{X + 1} + 1$ より $X = 3$

$$3 - a_{n+1} = 3 - (\sqrt{a_n + 1} + 1)$$
$$= 2 - \sqrt{a_n + 1}$$
$$= \frac{(2 - \sqrt{a_n + 1})(2 + \sqrt{a_n + 1})}{2 + \sqrt{a_n + 1}}$$
$$= \frac{1}{2 + \sqrt{a_n + 1}} (3 - a_n)$$

$0 < a_n < 3$ であるから

$$\left| a_{n+1} - 3 \right| < \frac{1}{3} \left| a_n - 3 \right|$$

この漸化式を繰り返すと

$$\left| a_{n+1} - 3 \right| < \left(\frac{1}{3} \right)^n \left| a_1 - 3 \right| = \left(\frac{2}{3} \right)^n \times 2$$

よって $0 \leq \left| a_{n+1} - 3 \right| < \left(\frac{1}{3} \right)^n \times 2$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_{n+1} - 3 \right| = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ になる。

問題① $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} + 2$ のとき、
 $0 < a_n < 5$ を示せ。

問題② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} + 2$ のとき、
 a_n の極限値を求めよ。
Find the limit value.]