数学Ⅲ　無限等比数列 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。
Find the limit of the sequence whose nth term is expressed by the following formula.

例題	問題
①数列 $\left\{\left(\sqrt{2}\right)^n\right\}$ $\sqrt{2}>1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n=\infty$	①数列 $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right\}$
②数列 $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ $\left\lvert\frac{3}{4}\right\rvert<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$	②数列 $\left\{\left(-\sqrt{3}\right)^n\right\}$
③数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ $-\frac{4}{3}<-1$ より 振動する　oscillate	③数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
③数列 $\left\{\left(\frac{3}{3}\right)^n\right\}$ $\frac{3}{3}=1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3}\right)^n=1$	④数列 $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

2．次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また，そのときの極限値を求めよ。
Find the range of x values such that the following sequence converges.
Also, find the limit value at that time.

例題	問題
数列 $\left\{\left(x+1\right)^n\right\}$ 収束するための 必要十分条件は $-1<x+1\leqq 1$ すなわち $-2<x\leqq 0$ 極限値は $-2<x<0$ のとき 0 $x=0$ のとき 1	数列 $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$

3．次の極限を求めよ。
Find the next limit value.

例題	問題
① $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ $=1$	① $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$
② $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1}$ $=0$	② $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2^n}{5^n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}$ $=\infty$	③ $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n}$

4．次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
Find the limit value of the following sequence $\{a_n\}$.

例題　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

※特性方程式 $x=\frac{1}{3}x+2$ より $x=3$

与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}\left(a_n-3\right)$，　$a_1-3=-2$

よって　$a_n-3=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3\right)=0$　より　$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

問題　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$

数学Ⅲ　無限等比数列 ② 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

例題	問題
①数列 $\left\{\left(\sqrt{3}\right)^n\right\}$ $\sqrt{3} > 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\right)^n = \infty$	①数列 $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$
②数列 $\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right\}$ $\left\lvert\dfrac{4}{5}\right\rvert < 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$	②数列 $\left\{\left(-\sqrt{2}\right)^n\right\}$
③数列 $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ $\left\lvert-\dfrac{2}{3}\right\rvert < 1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$	③数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$
③数列 $\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}$ $-\dfrac{6}{5} \leqq -1$ より 振動する	④数列 $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right\}$

2．次の数列が収束するような x の値の範囲を求めよ。
また，そのときの極限値を求めよ。

例題	問題
数列 $\left\{\left(\dfrac{x}{4}\right)^n\right\}$ 収束するための 必要十分条件は $-1 < \dfrac{x}{4} \leqq 1$ すなわち $-4 < x \leqq 4$ 極限値は $-4 < x < 4$ のとき 0 $x = 4$ のとき 1	数列 $\left\{\left(x+2\right)^n\right\}$

3．次の極限を求めよ。

例題	問題
① $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n-3^n}{4^n+3^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$ $=1$	① $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$
② $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n-4^n}{3^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{4}{3}\right)^n}{1}$ $=-\infty$	② $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^n}{4^n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{6^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{3}{6}\right)^n+\left(\dfrac{5}{6}\right)^n}{1}$ $=0$	③ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{5^n}$

4．次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

例題　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n - 1$

※特性方程式 $X = \dfrac{3}{4}X - 1$ より $X = -4$

与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1} + 4 = \dfrac{3}{4}\left(a_n + 4\right)$，　$a_1 + 4 = 5$

よって　$a_n + 4 = 5\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + 4\right) = 0$　より　$\lim_{n\to\infty} a_n = -4$

問題　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n - 2$

数学Ⅲ　無限等比数列 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

例題	問題
① 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ $\sqrt{3}>1$　より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n=\infty$	① 数列 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\right\}$
② 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ $\left\lvert -\frac{1}{2}\right\rvert<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$	② 数列 $\{(-\sqrt{3})^n\}$
③ 数列 $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ $-\frac{3}{2}<-1$ より 振動する	③ 数列 $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}$

2．次の数列の極限を，各場合について求めよ。

例題	問題
数列 $\left\{\frac{r^n}{2-r^n}\right\}$	数列 $\left\{\frac{2+r^n}{2-r^n}\right\}$
①　$\lvert r\rvert<1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2-r^n}=0$	①　$\lvert r\rvert<1$
②　$r=1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2-r^n}=1$	②　$r=1$
③　$r<-1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$　より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2-r^n}$ $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{r^n}-1}=-1$	③　$r<-1$

3．次の極限を求めよ。

例題	問題
① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$ $=-1$	① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{4^n-2^n}$
② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n-2^n}$ $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{2}{4}\right)^n}$ $=\infty$	② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-2^n}$
③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+2^n}{5^n}$ $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1}$ $=0$	③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n}$

4．次の数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

例題　$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1$

※特性方程式　$X=\frac{3}{4}X+1$ より　$X=4$

与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-4=\frac{3}{4}(a_n-4)$，　$a_1-4=-2$

よって　$a_n-4=-2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-4)=0$　より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$

問題　$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+3$

数学Ⅲ　無限等比数列(漸化式) ① 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

例題①　$a_1 = 2,\ 3a_{n+1} = 2a_n + 1$ の極限値を求めよ。

特性方程式より　$3X = 2X + 1$　より $X = 1$

$3a_{n+1} = 2a_n + 1$　は

$a_{n+1} - 1 = \dfrac{2}{3}(a_n - 1)$ と変形できる

$a_n - 1$ は初項 1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right\} = 1$

問題①　$a_1 = 3,\ 5a_{n+1} = 3a_n + 2$ の極限値を求めよ。

例題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ の極限値を求めよ。

（特性方程式より　$X = \sqrt{2X + 3}$

$X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1) = 0$

$X > 0$ より $X = 3$）

$\left|a_{n+1} - 3\right| < \dfrac{2}{3}\left|a_n - 3\right|$ を示す。

$$a_{n+1} - 3 = \sqrt{2a_n + 3} - 3$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2a_n + 3} - 3\right)\left(\sqrt{2a_n + 3} + 3\right)}{\sqrt{2a_n + 3} + 3}$$

$$= \frac{2a_n - 6}{\sqrt{2a_n + 3} + 3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2a_n + 3} + 3}(a_n - 3)$$

ここで，$a_1 = 1$ と $\sqrt{2a_n + 3} + 3 > 3$ より

$\left|a_{n+1} - 3\right| < \dfrac{2}{3}\left|a_n - 3\right|$

この漸化式を繰り返すと

$$\left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^n\left|a_1 - 3\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2$$

よって　$0 \leqq \left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times 2$

はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1} - 3\right| = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 3$　になる。

問題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ の極限値を求めよ。

数学Ⅲ　無限等比数列(漸化式) ② 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

例題①　$a_1 = 3,\ 4a_{n+1} = 3a_n + 2$ の極限値を求めよ。

特性方程式より　$4X = 3X + 2$　より　$X = 2$

$4a_{n+1} = 3a_n + 2$　は

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}\left(a_n - 2\right)$$ と変形できる

$a_n - 2$ は初項 1 , 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列である。

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 2$$

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\right\} = 2$

例題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ の極限値を求めよ。

(特性方程式より　$X = \sqrt{X + 6}$
$X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2) = 0$
$X > 0$ より $X = 3$)

$\left|a_{n+1} - 3\right| < \frac{1}{3}\left|a_n - 3\right|$　を示す。

$$a_{n+1} - 3 = \sqrt{a_n + 6} - 3$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a_n + 6} - 3\right)\left(\sqrt{a_n + 6} + 3\right)}{\sqrt{a_n + 6} + 3}$$

$$= \frac{a_n - 3}{\sqrt{a_n + 6} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_n + 6} + 3}\left(a_n - 3\right)$$

ここで，$a_1 = 1$ と $\sqrt{a_n + 6} + 3 > 3$ より

$$\left|a_{n+1} - 3\right| < \frac{1}{3}\left|a_n - 3\right|$$

この漸化式を繰り返すと

$$\left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\frac{1}{3}\right)^n\left|a_1 - 3\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1$$

よって　$0 \leqq \left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

はさみうちの原理より　$\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1} - 3\right| = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 3$　になる。

問題①　$a_1 = 2,\ 4a_{n+1} = a_n + 3$ の極限値を求めよ。

問題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ の極限値を求めよ。

数学Ⅲ　無限等比数列(漸化式) ③ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

例題①　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} + 1$　のとき，
$0 < a_n < 3$ を示せ。

[1] $n = 1$ のとき　　$0 < a_1 = 1 < 3$

[2] $n = k$ のとき　　$0 < a_k < 3$ とすると

$3 - a_{k+1} = 3 - \left(\sqrt{a_k + 1} + 1\right) = 2 - \sqrt{a_k + 1}$

$1 < \sqrt{a_k + 1} < 2$　より　$3 - a_{k+1} > 0$

明らかに $a_{k+1} > 0$ であるから

$n = k + 1$ のときも $0 < a_{k+1} < 3$ が成り立つ。

[1], [2]より，$0 < a_n < 3$　が成り立つ。

例題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} + 1$　のとき，
a_n の極限値を求めよ。

特性方程式より　$x = \sqrt{x + 1} + 1$　より　$x = 3$

$3 - a_{n+1} = 3 - \left(\sqrt{a_n + 1} + 1\right)$

$= 2 - \sqrt{a_n + 1}$

$= \dfrac{\left(2 - \sqrt{a_n + 1}\right)\left(2 + \sqrt{a_n + 1}\right)}{2 + \sqrt{a_n + 1}}$

$= \dfrac{1}{2 + \sqrt{a_n + 1}}\left(3 - a_n\right)$

$0 < a_n < 3$　であるから

$\left|a_{n+1} - 3\right| < \dfrac{1}{3}\left|a_n - 3\right|$

この漸化式を繰り返すと

$\left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left|a_1 - 3\right| = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times 2$

よって　$0 \leqq \left|a_{n+1} - 3\right| < \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times 2$

はさみうちの原理より　$\lim_{n \to \infty}\left|a_{n+1} - 3\right| = 0$

$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n = 3$　になる。

問題①　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} + 2$　のとき，
$0 < a_n < 5$ を示せ。

問題②　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} + 2$　のとき，
a_n の極限値を求めよ。
]