

1. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.
3. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.

例題

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$

$x = t - 1$ より $t = x + 1$
 t を y の式に代入して
 $y = (x + 1)^2 + 2(x + 1)$
 $= x^2 + 2x + 1 + 2x + 2$
よって $y = x^2 + 6x + 3$

問題

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 4t \end{cases}$$

2. 次の放物線の頂点は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。
What kind of curve does the vertex of the following parabola draw as the value of t changes ?

例題

$$y = x^2 - 4tx + 4t$$

放物線の式を変形し $y = (x - 2t)^2 - 4t^2 + 4t$
頂点を $P(x, y)$ とすると $x = 2t, y = -4t^2 + 4t$
 $t = \frac{x}{2}$ を y の式に代入して
 $y = -4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) = -x^2 + 2x$
頂点 P が描く図形は放物線 $y = -x^2 + 2x$

問題

$$y = x^2 - 2tx + 2t$$

例題

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos \theta \\ y &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

$\cos \theta = \frac{x}{4}, \sin \theta = \frac{y}{2}$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して
 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 1$
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

問題

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos \theta \\ y &= 5 \sin \theta \end{aligned}$$

4. 角 θ を媒介変数として、次の曲線を表せ。
Express the following curve using the angle θ as a parameter.

例題①

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$
$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 4 \sin \theta$$

問題①

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

例題②

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$
$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$
$$x = \frac{5}{\cos \theta}, \quad y = 4 \tan \theta$$

問題②

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

1. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.
3. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.

例題 $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$

$y = t + 1$ より $t = y - 1$
 t を y の式に代入して
 $x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) + 1$
 $= y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 + 1 = y^2 - 4y + 4$
よって $x = y^2 - 4y + 4$ ※放物線

問題 $\begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$

2. 次の放物線の頂点は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。
What kind of curve does the vertex of the following parabola draw as the value of t changes ?

例題 $y = x^2 - 4tx - 4t^2$

放物線の式を変形し $y = (x - 2t)^2 - 8t^2$
頂点を $P(x, y)$ とすると $x = 2t, y = -8t^2$
 $t = \frac{x}{2}$ を y の式に代入して
 $y = -8\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -2x^2$
頂点 P が描く図形は放物線 $y = -2x^2$

問題 $y = x^2 - 2tx + 3t^2$

例題 $x = \frac{2}{\cos \theta}, y = \tan \theta - 1$

$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{x}{2}, \tan \theta = y + 1$ を
 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ に代入して
 $1 + (y + 1)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$
よって $\frac{x^2}{2^2} - (y + 1)^2 = 1$ ※双曲線

問題 $x = \frac{1}{\cos \theta} + 2, y = 2 \tan \theta$

4. 角 θ を媒介変数として、次の曲線を表せ。
Express the following curve using the angle θ as a parameter.

例題① $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$
 $x = 5 \cos \theta, y = 4 \sin \theta$

問題① $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

例題② $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$
 $x = \frac{4}{\cos \theta}, y = 2 \tan \theta$

問題② $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

1. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.
3. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。
Find the equations of x and y for the following curve with parametric variables displayed.

例題

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

$x = \sqrt{t} - 1$ より $t = (x + 1)^2$ ($x \geq -1$ の部分)

t を y の式に代入して

$y = 2(x + 1)^2 - 1$ ($x \geq -1$ の部分)

放物線 $y = 2(x + 1)^2 - 1$ の $x \geq -1$ の部分

問題

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

2. 次の放物線の頂点は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。
What kind of curve does the vertex of the following parabola draw as the value of t changes ?

例題

$$y = -x^2 - 4tx + 1$$

式を変形し $y = -(x + 2t)^2 + 4t^2 + 1$

頂点を $P(x, y)$ とすると $x = -2t, y = 4t^2 + 1$

$t = -\frac{x}{2}$ を y の式に代入して

$y = 4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = x^2 + 1$

頂点 P が描く図形は放物線 $y = x^2 + 1$

問題

$$y = -x^2 + 2tx + 2t$$

例題

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos \theta + 1 \\ y &= 4 \sin \theta - 3 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{x - 1}{3}, \quad \sin \theta = \frac{y + 3}{4}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して

$$\left(\frac{y + 3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x - 1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$$

問題

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos \theta \\ y &= 5 \sin \theta \end{aligned}$$

4. 点 P が、次の曲線上を動くことを示せ。
Show that point P moves on the following curve.

例題

点 $P\left(\frac{2}{\cos \theta}, 3 \tan \theta\right)$ が $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動くことを示せ。

$$x = \frac{2}{\cos \theta}, y = 3 \tan \theta$$
 とすると、

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

よって、点 P は $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動く。

問題

点 $P(5 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ が $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動くことを示せ。