

1. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。  
Find the equations of  $x$  and  $y$  for the following curve with parametric variables displayed.
3. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。  
Find the equations of  $x$  and  $y$  for the following curve with parametric variables displayed.

例題

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$$

$x = t - 1$  より  $t = x + 1$   
 $t$  を  $y$  の式に代入して  
 $y = (x + 1)^2 + 2(x + 1)$   
 $= x^2 + 2x + 1 + 2x + 2$   
よって  $y = x^2 + 6x + 3$

問題

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 4t \end{cases}$$

2. 次の放物線の頂点は、 $t$  の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。  
What kind of curve does the vertex of the following parabola draw as the value of  $t$  changes?

例題

$y = x^2 - 4tx + 4t$

放物線の式を変形し  $y = (x - 2t)^2 - 4t^2 + 4t$   
頂点を  $P(x, y)$  とすると  $x = 2t, y = -4t^2 + 4t$   
 $t = \frac{x}{2}$  を  $y$  の式に代入して  
 $y = -4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) = -x^2 + 2x$   
頂点  $P$  が描く図形は放物線  $y = -x^2 + 2x$

問題

$y = x^2 - 2tx + 2t$

例題

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos \\ y &= 2 \sin \end{aligned}$$

$\cos = \frac{x}{4}, \sin = \frac{y}{2}$   
 $\sin^2 + \cos^2 = 1$  に代入して  
 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 1$   
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

問題

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos \\ y &= 5 \sin \end{aligned}$$

4. 角を媒介変数として、次の曲線を表せ。  
Express the following curve using the angle as a parameter.

例題

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= 1 \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} &= 1 \end{aligned}$$

$x = 3 \cos, y = 4 \sin$

問題

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

例題

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} &= 1 \\ \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} &= 1 \end{aligned}$$

$x = \frac{5}{\cos}, y = 4 \tan$

問題

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

1. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。

3. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。

例題

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

$$y = t + 1 \text{ より } t = y - 1$$

$$t \text{ を } y \text{ の式に代入して}$$

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) + 1$$

$$= y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 + 1 = y^2 - 4y + 4$$

$$\text{よって } x = y^2 - 4y + 4$$

放物線

問題

$$\begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

2. 次の放物線の頂点は、 $t$  の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

例題

$$y = x^2 - 4tx - 4t^2$$

放物線の式を変形し  $y = (x - 2t)^2 - 8t^2$

頂点を  $P(x, y)$  とすると  $x = 2t, y = -8t^2$

$$t = -\frac{x}{2} \text{ を } y \text{ の式に代入して}$$

$$y = -8\left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -2x^2$$

頂点  $P$  が描く図形は 放物線  $y = -2x^2$

問題

$$y = x^2 - 2tx + 3t^2$$

例題

$$x = \frac{2}{\cos}, y = \tan - 1$$

$$\frac{1}{\cos} = \frac{x}{2}, \tan = y + 1 \text{ を}$$

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \text{ に代入して}$$

$$1 + (y + 1)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\text{よって } \frac{x^2}{2^2} - (y + 1)^2 = 1$$

双曲線

問題

$$x = \frac{1}{\cos} + 2, y = 2 \tan$$

4. 角を媒介変数として、次の曲線を表せ。

例題

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$x = 5 \cos, y = 4 \sin$$

問題

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

例題

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$x = \frac{4}{\cos}, y = 2 \tan$$

問題

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

1. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。

3. 媒介変数表示された次の曲線の  $x, y$  の方程式を求めよ。

例題

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

$x = \sqrt{t} - 1$  より  $t = (x + 1)^2$  ( $x - 1$  の部分)

$t$  を  $y$  の式に代入して

$y = 2(x + 1)^2 - 1$  ( $x - 1$  の部分)

放物線  $y = 2(x + 1)^2 - 1$  の  $x - 1$  の部分

問題

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

2. 次の放物線の頂点は、 $t$  の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

例題

$$y = -x^2 - 4tx + 1$$

式を変形し  $y = -(x + 2t)^2 + 4t^2 + 1$

頂点を  $P(x, y)$  とすると  $x = -2t, y = 4t^2 + 1$

$t = -\frac{x}{2}$  を  $y$  の式に代入して

$y = 4\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = x^2 + 1$

頂点  $P$  が描く図形は放物線  $y = x^2 + 1$

問題

$$y = -x^2 + 2tx + 2t$$

例題

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta + 1 \\ y = 4\sin\theta - 3 \end{cases}$$

$\cos\theta = \frac{x-1}{3}, \sin\theta = \frac{y+3}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  に代入して

$\left(\frac{y+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = 1$

$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

問題

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$$

4. 点  $P$  が、次の曲線上を動くことを示せ。

例題

点  $P\left(\frac{2}{\cos\theta}, 3\tan\theta\right)$  が  $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$  上を動くことを示せ。

$x = \frac{2}{\cos\theta}, y = 3\tan\theta$  とすると、

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta$$

$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

よって、点  $P$  は  $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$  上を動く

問題

点  $P(5\cos\theta, 3\sin\theta)$  が  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$  上を動くことを示せ。