

1. 次の2次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。

Find the number of common points between the following quadratic curve and the straight line.

例題 $x^2 + 2y^2 = 6, \quad y = x + k$

直線の式を代入し、 $x^2 + 2(x + k)^2 = 6$

整理すると $3x^2 + 4kx + 2k^2 - 6 = 0$

この式の判別式を D とすると

$$D = (4k)^2 - 4 \times 3 \times (2k^2 - 6)$$
$$= -8k^2 + 72 = -8(k - 3)(k + 3)$$

よって、共有点の個数は、次のようになる。

$D > 0$	すなわち	$k < -3, 3 < k$	のとき	2個
$D = 0$	すなわち	$k = -3, 3 = k$	のとき	1個
$D < 0$	すなわち	$-3 < k < 3$	のとき	0個

問題① $x^2 + 3y^2 = 12, \quad y = x + k$

問題② $x^2 - 2y^2 = 2, \quad y = x + k$

2. 次の2次曲線上にない点から、2次曲線に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。

Find the equation of the tangent to the quadratic curve from a point that is not on the quadratic curve.

例題 点 $C(0, 4)$ から $x^2 + 3y^2 = 12$ に接線を引く。

その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y = mx + 4$ とおく。

代入すると、 $x^2 + 3(mx + 4)^2 = 12$

整理して $(3m^2 + 1)x^2 + 24mx + 36 = 0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$$D = (24m)^2 - 4 \times (3m^2 + 1) \times 36$$
$$= 144(m^2 - 1)$$

直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときであるから

$$m = \pm 1$$

よって、接線の方程式は

$$y = x + 4, \quad y = -x + 4$$

問題 点 $C(0, 3)$ から $x^2 + 2y^2 = 6$ に接線を引く。

その接線の方程式を求めよ。

1. 次の2次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。
Find the number of common points between the following quadratic curve and the straight line.

例題 $x^2 - 4y^2 = 4$, $y = x + k$

直線の式を代入し、 $x^2 - 4(x + k)^2 = 4$

整理すると $-3x^2 - 8kx - 4k^2 - 4 = 0$

この式の判別式を D とすると

$$D = (-8k)^2 - 4 \times (-3) \times (-4k^2 - 4)$$
$$= 16k^2 - 48 = 16(k - \sqrt{3})(k + \sqrt{3})$$

よって、共有点の個数は、次のようになる。

$D > 0$ すなわち $k < -\sqrt{3}, 1 < \sqrt{3}$ のとき 2個

$D = 0$ すなわち $k = \pm\sqrt{3}$ のとき 1個

$D < 0$ すなわち $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ のとき 0個

問題① $x^2 - 3y^2 = 3$, $y = x + k$

問題② $x^2 + 4y^2 = 4$, $y = x + k$

2. 次の2次曲線上にない点から、2次曲線に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。
Find the equation of the tangent to the quadratic curve from a point that is not on the quadratic curve.

例題 点 $C(2, 0)$ から $y^2 = -2x$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y = m(x - 2)$ とおく。

代入すると、 $m^2(x - 2)^2 = -2x$

整理して $m^2x^2 + (-4m^2 + 2)x + 4m^2 = 0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$$D = (-4m^2 + 2)^2 - 4 \times m^2 \times 4m^2$$
$$= 16m^2 - 4 = 16\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

$D = 0$ のとき直線が放物線に接するから

$$m = \pm \frac{1}{2}$$

よって、接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x - 2), \quad y = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

式を整理すると

$$y = \frac{1}{2}x - 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

問題 点 $C(4, 0)$ から $y^2 = -x$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。

1. 次の2次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。

Find the number of common points between the following quadratic curve and the straight line.

例題

$$2x^2 + y^2 = 6, \quad y = x + k$$

直線の式を代入し、 $2x^2 + (x + k)^2 = 6$

整理すると $3x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$

この式の判別式を D とすると

$$D = (2k)^2 - 4 \times 3 \times (k^2 - 6)$$
$$= -8k^2 + 72 = -8(k - 3)(k + 3)$$

よって、共有点の個数は、次のようになる。

$D > 0$	すなわち	$k < -3, 3 < k$	のとき	2個
$D = 0$	すなわち	$k = -3, 3 = k$	のとき	1個
$D < 0$	すなわち	$-3 < k < 3$	のとき	0個

問題①

$$3x^2 + y^2 = 12, \quad y = x + k$$

問題②

$$2x^2 - y^2 = 4, \quad y = x + k$$

2. 次の2次曲線上にない点から、2次曲線に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。

Find the equation of the tangent to the quadratic curve from a point that is not on the quadratic curve.

例題

点 $C(0, 4)$ から $3x^2 + y^2 = 12$ に接線を引く。

その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y = mx + 4$ とおく。

代入すると、 $3x^2 + (mx + 4)^2 = 12$

整理して $(m^2 + 3)x^2 + 8mx + 4 = 0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$$D = (8m)^2 - 4 \times (m^2 + 3) \times 4$$
$$= 48(m^2 - 1)$$

直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときであるから

$$m = \pm 1$$

よって、接線の方程式は

$$y = x + 4, \quad y = -x + 4$$

問題

点 $C(0, 3)$ から $2x^2 + y^2 = 6$ に接線を引く。

その接線の方程式を求めよ。

数学Ⅲ じきょくせん 2次曲線と直線 ちやくせん (中点) ちゆうてん ① かだい 課題

1. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題

$$4x^2 - y^2 = 4, \quad y = 3x - 5$$

ちやくせん しき きやくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$4 \ x^2 - (3x - 5)^2 = 4$$

$$\text{しき} \quad \text{せいり}$$

$$\text{式を整理すると}$$

$$5x^2 - 30x + 29 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $5x^2 - 30x + 29 = 0$ の解である。

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-30)}{5} = 6$$

ちゅうてん
中点 **M** の **x** 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$,

y 座標は $y = 3x - 5$ に代入し, $y = 4$

したがって、 M の座標^{ざひょう}は $(3, 4)$

問題

$$2x^2 - y^2 = 1, \quad y = 2x - 3$$

()年()組()番()

2. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題

$$x^2 + 2y^2 = 2 \quad , \quad y = x - 2$$

ちよくせん しき きよくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$x^2 + 2(x - 2)^2 = 2$$

しき せいり
式を整理すると

$$3x^2 - 8x + 6 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

$$x_1, x_2 \text{ は } 3x^2 - 8x + 6 = 0 \text{ の解である。}$$

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3}$$

ちゅうてん
中点 M の x 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4}{3}$

y 座標は $y = x - 2$ に代^{だいに}入^{ゆう}し, $y = -\frac{2}{3}$

したがって、 \mathbf{M} の座標は $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right)$

問題

$$x^2 + 2y^2 = 2 \quad , \quad y = x - 1$$

数学Ⅲ じきょくせん 2次曲線と直線 ちやくせん (中点) ちゆうてん ② かだい 課題

1. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題

$$3x^2 - y^2 = 3, \quad y = x - 2$$

ちやくせん しき きやくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$3 \quad x^2 - (x - 2)^2 = 3$$

$$\text{しき} \quad \text{せいり}$$

$$\text{式を整理すると}$$

$$2x^2 + 4x - 1 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $2x^2 + 4x - 1 = 0$ の解である。

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

ちゅうてん
中点 **M** の x 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$,

y 座標は $y = x - 2$ に代入し, $y = -3$

したがって、 M の座標は $(-1, -3)$

問題

$$4x^2 - y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

()年()組()番()

2. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題

$$4x^2 + y^2 = 20 \quad , \quad y = 2x - 2$$

ちよくせん しき きよくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$4x^2 + (2x - 2)^2 = 20$$

$$\text{しき} \quad \text{せいり}$$

$$\text{式を整理すると}$$

$$8x^2 - 8x - 16 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

$$x_1, x_2 \text{ は } x^2 - x - 2 = 0 \text{ の解である。}$$

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

ちゅうてん
中点 M の x 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4}$

y 座標は $y = 2x - 2$ に代 入 し, $y = -\frac{3}{2}$

したがって、 \mathbf{M} の $\overset{\text{さひょう}}{\text{座標}}$ は $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$

問題

$$2x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad y = 2x - 1$$

数学Ⅲ じきょくせん 2次曲線と直線 ちやくせん (中点) ちゆうてん ③ かだい 課題

1. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題 $x^2 + 2y^2 = 6$, $y = x - 1$

ちやくせん しき きやくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$x^2 + 2(x - 1)^2 = 6$$

しき せいり
式を整理すると

$$3 \quad x^2 - 4x - 4 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $3x^2 - 4x - 4 = 0$ の解である。

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-4)}{3} = \frac{4}{3}$$

中点 M の x 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2}{3}$

y 座標は $y = x - 1$ に代入し, $y = -\frac{1}{3}$

したがって、 M の 座標 は $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$

問題 $x^2 + 3y^2 = 7$, $y = x + 1$

()年()組()番()

2. 2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。
Find the coordinates of the midpoint M between the intersection points P and Q of the quadratic curve and the straight line.

例題 $x^2 - 3y^2 = 1$, $y = x + 1$

ちよくせん しき きよくせん しき だいにゆう
直線の式を曲線の式に代入し、

$$x^2 - 3(x + 1)^2 = 1$$

しき せいり
式を整理すると

$$-2x^2 + 6x - 4 = 0$$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $2x^2 - 6x + 4 = 0$ の解である。

かい けいすう かんけい
解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

中点 M の x 座標は $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3}{2}$

y 座標は $y = x + 1$ に代入し, $y = -\frac{1}{2}$

したがって、 M の座標は $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

問題 $x^2 - 2y^2 = 1$, $y = x - 1$

1. 次の方程式はどのような図形を表すか。
What shape does the following equation represent?

例題

$$3x^2 + 12x - y^2 = 0$$
$$3(x^2 - 4x) - y^2 = 0$$
$$3\{(x - 2)^2 - 4\} - y^2 = 0$$
$$3(x - 2)^2 - y^2 = 12$$
$$\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

双曲線 hyperbola

問題

$$3x^2 - 24x + 4y^2 = 0$$

2. 次のような点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P as shown below.

例題

点 F(4, 0) と直線 $x = -2$ との距離の比が,
1 : 1 である点 P(x, y) の軌跡を求めよ。
点 P から直線 $x = -2$ に下ろした垂線を PH とする。
 $PF = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$, $PH = |x + 2|$
条件より $PF : PH = 1 : 1$ すなわち $PF = PH$
 $\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = |x + 2|$
両辺を2乗して $(x - 4)^2 + y^2 = (x + 2)^2$
式を整理すると $y^2 - 12x + 12 = 0$
放物線 Parabola $y^2 = 12(x - 1) = 0$

問題

点 F(2, 0) と直線 $x = -4$ との距離の比が,
1 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

3. 次のような点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P as shown below.

例題②

点 F(4, 0) と直線 $x = -2$ との距離の比が,
1 : 2 である点 P(x, y) の軌跡を求めよ。
点 P から直線 $x = -2$ に下ろした垂線を PH とする。
 $PF = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$, $PH = |x + 2|$
条件より $PF : PH = 1 : 2$ すなわち $2PF = PH$
 $2\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = |x + 2|$
両辺を2乗して $4\{(x - 4)^2 + y^2\} = (x + 2)^2$
式を整理して $3x^2 - 36x + 4y^2 + 60 = 0$
楕円 Ellipse $\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

問題①

点 F(2, 0) と直線 $x = -1$ との距離の比が,
2 : 1 である点 P(x, y) の軌跡を求めよ。

問題②

点 F(2, 0) と直線 $x = -4$ との距離の比が,
1 : 2 である点 P の軌跡を求めよ。

