数学Ⅲ　2次曲線と直線 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　)

1．次の 2 次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。

Find the number of common points between the following quadratic curve and the straight line.

例題　$x^2 + 2y^2 = 6$，　$y = x + k$

直線の式を代入し，　$x^2 + 2(x + k)^2 = 6$

整理すると　$3x^2 + 4kx + 2k^2 - 6 = 0$

この式の判別式を D とすると

$D = (4k)^2 - 4 \times 3 \times (2k^2 - 6)$

$= -8k^2 + 72 = -8(k - 3)(k + 3)$

よって，共有点の個数は，次のようになる。

$D > 0$　すなわち　$k < -3,\ 3 < k$　のとき　2個

$D = 0$　すなわち　$k = -3,\ 3 = k$　のとき　1個

$D < 0$　すなわち　$-3 < k < 3$　のとき　0個

問題①　$x^2 + 3y^2 = 12$，　$y = x + k$

問題②　$x^2 - 2y^2 = 2$，　$y = x + k$

2．次の 2 次曲線上にない点から，2 次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

Find the equation of the tangent to the quadratic curve from a point that is not on the quadratic curve.

例題　点 $C(0,4)$ から $x^2 + 3y^2 = 12$ に接線を引く。その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y = mx + 4$ とおく。

代入すると，$x^2 + 3(mx + 4)^2 = 12$

整理して　$(3m^2 + 1)x^2 + 24mx + 36 = 0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$D = (24m)^2 - 4 \times (3m^2 + 1) \times 36$

$= 144(m^2 - 1)$

直線が楕円に接するのは　$D = 0$ のときであるから

$m = \pm 1$

よって，接線の方程式は

$y = x + 4$　，　$y = -x + 4$

問題　点 $C(0,3)$ から $x^2 + 2y^2 = 6$ に接線を引く。その接線の方程式を求めよ。

数学Ⅲ　2次曲線と直線②課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　)

1．次の2次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。

例題　$x^2-4y^2=4$，$y=x+k$

直線の式を代入し，　$x^2-4(x+k)^2=4$

整理すると　$-3x^2-8kx-4k^2-4=0$

この式の判別式を D とすると

$D=(-8k)^2-4\times(-3)\times(-4k^2-4)$

$=16k^2-48=16(k-\sqrt{3})(k+\sqrt{3})$

よって，共有点の個数は，次のようになる。

$D>0$　すなわち　$k<-\sqrt{3},\ 1<\sqrt{3}$　　2個

$D=0$　すなわち　$k=\pm\sqrt{3}$　　1個

$D<0$　すなわち　$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ のとき　　0個

問題①　$x^2-3y^2=3$，$y=x+k$

問題②　$x^2+4y^2=4$，$y=x+k$

2．次の2次曲線上にない点から，2次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

例題　点 $C(2,0)$ から $y^2=-2x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y=m(x-2)$ とおく。

代入すると，$m^2(x-2)^2=-2x$

整理して　$m^2x^2+(-4m^2+2)x+4m^2=0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$D=(-4m^2+2)^2-4\times m^2\times 4m^2$

$=16m^2-4=16\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)$

$D=0$ のとき直線が放物線に接するから

$m=\pm\frac{1}{2}$　　よって，接線の方程式は

$y=\frac{1}{2}(x-2)$，　$y=-\frac{1}{2}(x-2)$

式を整理すると

$y=\frac{1}{2}x-1$，　$y=-\frac{1}{2}x+1$

問題　点 $C(4,0)$ から $y^2=-x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

数学Ⅲ　2次曲線と直線 ③ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の 2 次曲線と直線の共有点の個数を求めよ。

例題　$2x^2 + y^2 = 6$，　$y = x + k$

直線の式を代入し，　$2x^2 + (x + k)^2 = 6$

整理すると　$3x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$

この式の判別式を D とすると

$D = (2k)^2 - 4 \times 3 \times (k^2 - 6)$

$\quad = -8k^2 + 72 = -8(k - 3)(k + 3)$

よって，共有点の個数は，次のようになる。

$D > 0$　すなわち　$k < -3,\ 3 < k$　のとき　2 個

$D = 0$　すなわち　$k = -3,\ 3 = k$　のとき　1 個

$D < 0$　すなわち　$-3 < k < 3$ のとき　0 個

問題①　$3x^2 + y^2 = 12$，　$y = x + k$

問題②　$2x^2 - y^2 = 4$，　$y = x + k$

2．次の 2 次曲線上にない点から，2 次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

例題　点 $C(0, 4)$ から $3x^2 + y^2 = 12$ に接線を引く。
その接線の方程式を求めよ。

点 C を通る接線を $y = mx + 4$ とおく。

代入すると，$3x^2 + (mx + 4)^2 = 12$

整理して　$(m^2 + 3)x^2 + 8mx + 4 = 0$

この x に関する式の判別式を D とすると

$D = (8m)^2 - 4 \times (m^2 + 3) \times 4$

$\quad = 48(m^2 - 1)$

直線が楕円に接するのは $D = 0$ のときであるから

$m = \pm 1$

よって，接線の方程式は

$y = x + 4$　，　$y = -x + 4$

問題　点 $C(0, 3)$ から $2x^2 + y^2 = 6$ に接線を引く。
その接線の方程式を求めよ。

数学Ⅲ　2次曲線と直線(中点) ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$4x^2 - y^2 = 4$ ，$y = 3x - 5$

直線の式を曲線の式に代入し，

$4x^2 - (3x - 5)^2 = 4$

式を整理すると

$5x^2 - 30x + 29 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $5x^2 - 30x + 29 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-30)}{5} = 6$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 3$，

y 座標は $y = 3x - 5$ に代入し，$y = 4$

したがって，M の座標は $(3, 4)$

問題　$2x^2 - y^2 = 1$ ，$y = 2x - 3$

2．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$x^2 + 2y^2 = 2$ ，$y = x - 2$

直線の式を曲線の式に代入し，

$x^2 + 2(x - 2)^2 = 2$

式を整理すると

$3x^2 - 8x + 6 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $3x^2 - 8x + 6 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3}$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{4}{3}$

y 座標は $y = x - 2$ に代入し，$y = -\dfrac{2}{3}$

したがって，M の座標は $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

問題　$x^2 + 2y^2 = 2$ ，$y = x - 1$

数学Ⅲ　2次曲線と直線(中点) ② 課題　　( )年( )組( )番( )

1．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$3x^2 - y^2 = 3$ ， $y = x - 2$

直線の式を曲線の式に代入し，

$3x^2 - (x-2)^2 = 3$

式を整理すると

$2x^2 + 4x - 1 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $2x^2 + 4x - 1 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -1$，

y 座標は $y = x - 2$ に代入し，$y = -3$

したがって，M の座標は $(-1, -3)$

問題　$4x^2 - y^2 = 4$ ， $y = x + 3$

2．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$4x^2 + y^2 = 20$ ， $y = 2x - 2$

直線の式を曲線の式に代入し，

$4x^2 + (2x-2)^2 = 20$

式を整理すると

$8x^2 - 8x - 16 = 0$，$x^2 - x - 2 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $x^2 - x - 2 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1}{4}$

y 座標は $y = 2x - 2$ に代入し，$y = -\dfrac{3}{2}$

したがって，M の座標は $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{2}\right)$

問題　$2x^2 + y^2 = 1$ ， $y = 2x - 1$

数学Ⅲ　2次曲線と直線(中点) ③ 課題　　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

1．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$x^2 + 2y^2 = 6$　,　$y = x - 1$

直線の式を曲線の式に代入し，

$x^2 + 2(x-1)^2 = 6$

式を整理すると

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $3x^2 - 4x - 4 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-4)}{3} = \frac{4}{3}$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2}{3}$

y 座標は $y = x - 1$ に代入し，　$y = -\dfrac{1}{3}$

したがって，M の座標は $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

問題　$x^2 + 3y^2 = 7$　,　$y = x + 1$

2．2次曲線と直線の交点 P, Q の中点 M の座標を求めよ。

例題　$x^2 - 3y^2 = 1$　,　$y = x + 1$

直線の式を曲線の式に代入し，

$x^2 - 3(x+1)^2 = 1$

式を整理すると

$-2x^2 + 6x - 4 = 0$

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると

x_1, x_2 は $2x^2 - 6x + 4 = 0$ の解である。

解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

中点 M の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{3}{2}$

y 座標は $y = x + 1$ に代入し，　$y = -\dfrac{1}{2}$

したがって，M の座標は $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

問題　$x^2 - 2y^2 = 1$　,　$y = x - 1$

数学Ⅲ　2次曲線と直線(軌跡)　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の方程式はどのような図形を表すか。

例題　$3x^2 + 12x - y^2 = 0$

$3(x^2 - 4x) - y^2 = 0$

$3\{(x-2)^2 - 4\} - y^2 = 0$

$3(x-2)^2 - y^2 = 12$

$\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$　双曲線

問題　$3x^2 - 24x + 4y^2 = 0$

2．次のような点 P の軌跡を求めよ。

例題　点 F$(4, 0)$ と直線 $x = -2$ との距離の比が，
1：1 である点 P(x, y)の軌跡を求めよ。

点 P から直線 $x = -2$ に下ろした垂線を PH とする。

$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, $\mathrm{PH} = |x + 2|$

条件より PF：PH = 1：1　すなわち　PF = PH

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |x + 2|$

両辺を 2 乗して　$(x-4)^2 + y^2 = (x+2)^2$

式を整理すると　$y^2 - 12x + 12 = 0$

放物線　$y^2 = 12(x - 1) = 0$

問題　点 F$(2, 0)$ と直線 $x = -4$ との距離の比が，
1：1 である点 P の軌跡を求めよ。

3．次のような点 P の軌跡を求めよ。

例題②　点 F$(4, 0)$ と直線 $x = -2$ との距離の比が，
1：2 である点 P(x, y)の軌跡を求めよ。

点 P から直線 $x = -2$ に下ろした垂線を PH とする。

$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, $\mathrm{PH} = |x + 2|$

条件より PF：PH = 1：2　すなわち　2 PF = PH

$2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |x + 2|$

両辺を 2 乗して　$4\{(x-4)^2 + y^2\} = (x+2)^2$

式を整理して　$3x^2 - 36x + 4y^2 + 60 = 0$

楕円　$\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

問題①　点 F$(2, 0)$ と直線 $x = -1$ との距離の比が，
2：1 である点 P(x, y)の軌跡を求めよ。

問題②　点 F$(2, 0)$ と直線 $x = -4$ との距離の比が，
1：2 である点 P の軌跡を求めよ。