数学Ⅲ　複素数と図形①　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1． 次の点を表す複素数を求めよ。
Find the complex number that represents the following point.

例題①　A$(2i)$, C$(6+10i)$ のとき，AC の中点 M
Middle point

$$\frac{(2i)+(6+10i)}{2}=\frac{6+12i}{2}=3+6i$$

問題①　B(6), C$(6+10i)$ のとき，BC の中点 L

例題②　A$(2i)$, L$(6+5i)$ のとき
AL を 2 : 1 に内分する点 G
divide internally

$$\frac{1\times(2i)+2\times(6+5i)}{2+1}=\frac{12+12i}{3}$$
$$=4+4i$$

問題②　B(6), N$(3+i)$ のとき
BN を 2 : 1 に内分する点 G

例題③　A$(2i)$, G$(4+4i)$ のとき
AG を 3 : 1 に外分する点 L
divide externally

$$\frac{-1\times(2i)+3\times(4+4i)}{3-1}=\frac{12+10i}{2}$$
$$=6+5i$$

問題③　B(6), G$(4+4i)$ のとき
BG を 3 : 1 に外分する点 M

2． 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。
What kind of figure is the entire point z that satisfies the following equation?

例題①　$|z-2i|=1$

点 $2i$ を中心とする半径 1 の円
Circle with radius 1 centered at point $2i$.

問題①　$|z-3i|=2$

例題②　$|z-2i|=|z-4|$

2点 A$(2i)$, B(4) を結ぶ線分 AB の垂直2等分線
Perpendicular bisector of line segment AB connecting two points A($2i$) and B(4)

問題②　$|z-3i|=|z-3|$

例題③　$2|z|=|z-6|$

両辺を2乗すると

$$4|z|^2=|z-6|^2$$
$$4z\bar{z}=(z-6)(\overline{z-6})$$
$$4z\bar{z}=(z-6)(\bar{z}-6)$$
$$3z\bar{z}+6z+6\bar{z}=36$$
$$z\bar{z}+2z+2\bar{z}=12$$
$$(z+2)(\bar{z}+2)=16 \quad \text{すなわち} \quad |z+2|^2=4^2$$

したがって　$|z+2|=4$

点 -2 を中心とする半径 4 の円
Circle with radius 4 centered at point -2.

問題③　$2|z|=|z-3|$

数学Ⅲ　複素数と図形②　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1. 次の点を表す複素数を求めよ。

Find the complex number that represents the following point.

例題①　A$(4i)$, C$(4+8i)$ のとき，AC の中点 M

$$\frac{(4i)+(4+8i)}{2}=\frac{4+12i}{2}=2+6i$$

問題①　B(8), C$(4+8i)$ のとき，BC の中点 L

例題②　A$(4i)$, L$(6+4i)$ のとき

AL を 2 : 1 に内分する点 G

$$\frac{1\times(4i)+2\times(6+4i)}{2+1}=\frac{12+12i}{3}$$

$=4+4i$

問題②　B(8), N$(2+6i)$ のとき

BN を 2 : 1 に内分する点 G

例題③　A$(4i)$, G$(4+4i)$ のとき

AG を 3 : 1 に外分する点 L

$$\frac{-1\times(4i)+3\times(4+4i)}{3-1}=\frac{12+8i}{2}$$

$=6+4i$

問題③　B(8), G$(4+4i)$ のとき

BG を 3 : 1 に外分する点 M

2. 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

What kind of figure is the entire point z that satisfies the following equation?

例題①　$|z-2|=1$

点 2 を中心とする半径 1 の円

Circle with radius 1 centered at point 2.

問題①　$|z-3|=2$

例題②　$|z-4i|=|z-2|$

2点 A$(4i)$, B(2) を結ぶ線分 AB の垂直2等分線

問題②　$|z-i|=|z-1|$

3. 複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，次の複素数 w は
どのような図形を描くか。

When complex number z satisfies $|z|=1$,
what kind of figure will the next complex number w draw?

例題①　$w=i(z-1)$

$z=\dfrac{w+i}{i}$ であるから

$$|z|=\left|\frac{w+i}{i}\right|=\frac{|w+i|}{|i|}=|w+i|=1$$

点 w は点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

問題①　$w=2z+1$

例題②　$w=\dfrac{2-i}{z}$

$z=\dfrac{2-i}{w}$ であるから　$|z|=\left|\dfrac{2-i}{w}\right|=1$

$$|w|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

点 w は原点を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円を描く。

問題②　$w=\dfrac{3+4i}{z}$

数学Ⅲ　複素数と図形③　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の点を表す複素数を求めよ。
Find the complex number that represents the following point.

例題①　A(0), C$(6+8i)$ のとき，AC の中点 M

$$\frac{(0)+(6+8i)}{2}=\frac{6+8i}{2}=3+4i$$

問題①　B(6), C$(6+8i)$ のとき，BC の中点 L

例題②　A(0), L$(6+3i)$ のとき
AL を 2 : 1 に内分する点 G

$$\frac{1\times(0)+2\times(6+3i)}{2+1}=\frac{12+6i}{3}$$

$=4+2i$

問題②　B(6), N$(3-i)$ のとき
BN を 2 : 1 に内分する点 G

例題③　A(0), G$(4+2i)$ のとき
AG を 3 : 1 に外分する点 L

$$\frac{-1\times(0)+3\times(4+2i)}{3-1}=\frac{12+6i}{2}$$

$=6+3i$

問題③　B(6), G$(4+2i)$ のとき
BG を 3 : 1 に外分する点 M

2. 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。
What kind of figure is the entire point z that satisfies the following equation?

例題①　$|z-(1-2i)|=1$
点 $1-2i$ を中心とする半径 1 の円
Circle with radius 1 centered at point $1-2i$.

問題①　$|z+1-2i|=3$

例題②　$|z-2i|=|z-4|$
2点 A$(2i)$, B(4) を結ぶ線分 AB の垂直2等分線

問題②　$|z+3i|=|z-3|$

例題③　$z+\bar{z}=6$

$z=a+bi$ とすると，$\bar{z}=a-bi$

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=6$　　$\therefore a=3$
点 3 を通る実軸に垂直な直線

問題③　$z-\bar{z}=4i$

3. 複素数 z が $|z-i|=1$ を満たすとき，次の複素数 w はどのような図形を描くか。
When complex number z satisfies $|z|=1$, what kind of figure will the next complex number w draw?

例題　$w=i(z+1)$

$z=\dfrac{w}{i}+1$ であるから

$$|z-i|=\left|\frac{w}{i}+1-i\right|=\left|\frac{w+i+1}{i}\right|$$

$$=\frac{|w+i+1|}{|i|}=|w+i+1|=1$$

点 w は点 $-1-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

問題　$w=2z+1$

数学Ⅲ　複素数と図形(図形への応用)①　課題　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1. 原点 O と点 A(α)，B(β)について OA⊥OB であるような実数 x を求めよ。

Find a real number x such that OA ⊥ OB for the origin O and points A(α) and B(β).

例題　$\alpha = 2 + i,\ \beta = x - 2i$

OA⊥OB なら $\beta = w\alpha$ となる純虚数 $w = yi$ がある。

$x - 2i = yi(2 + i) = -y + 2yi$

よって，$x = -y$，$-2 = 2y$

$y = -1$　であるから　$x = 1$

問題　$\alpha = 3 + i,\ \beta = x - i$

2. 次の△ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。

Find the magnitude of ∠BAC in the following △ABC.

例題　A(1), B($3 + i$), C($2 + 3i$)

$\alpha = 1,\ \beta = 3 + i,\ \gamma = 2 + 3i$　とする。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$= \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leqq \pi$ とすると

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$

問題　A(2), B($4 + 3i$), C($-1 + 2i$)

3. 0 でない 2 つの複素数 α, β が次の等式を満たすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。また，複素数平面上の 3 点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形の角の大きさを求めよ。

When two non-zero complex numbers α and β satisfy the following equation, express β / α in polar form. The eccentric angle θ is $-\pi < \theta \leqq \pi$. Also, find the size of the angles of the triangle whose vertices are the three points 0, α, and β on the complex plane.

例題　$2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$

両辺を α^2 で割ると　$2 - 2\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 2 = 0$$

$\dfrac{\beta}{\alpha} = 1 \pm i$　より，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \pm\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

O(0), A(α), B(β)とすると

$\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ より　$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{4}$

$\left|\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0}\right| = \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{2}$　よって　$\mathrm{OB} = \sqrt{2}\ \mathrm{OA}$

△OAB は　$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{4}$　であるから

求める角は　$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{4}$

問題　$\alpha^2 + \beta^2 = 0$

数学Ⅲ　複素数と図形(図形への応用)②　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．原点 O と点 A(α)，B(β)について OA⊥OB であるような実数 x を求めよ。

Find a real number x such that OA ⊥ OB for the origin O and points A(α) and B(β).

例題　$\alpha = 2 - i$，$\beta = x + 4i$

OA⊥OB なら $\beta = w\alpha$ となる純虚数 $w = yi$ がある。

$x + 4i = yi(2 - i) = -y + 2yi$

よって，$x = -y$，$4 = 2y$

$y = 2$　であるから　$x = -1$

問題　$\alpha = 3 + 3i$，$\beta = x - i$

2．次の△ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。

Find the magnitude of ∠BAC in the following △ABC.

例題　A(1), B($2 - i$), C($1 + 2i$)

$\alpha = 1$，$\beta = 2 - i$，$\gamma = 1 + 2i$　とする。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2i}{1 - i} = \frac{2i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

$$= \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leqq \pi$ とすると

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{3\pi}{4}$

問題　A(i), B($1 + 2i$), C($-2 + i$)

3．0 でない 2 つの複素数 α，β が次の等式を満たすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。また，複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形の角の大きさを求めよ。

When two non-zero complex numbers α and β satisfy the following equation, express β / α in polar form. The eccentric angle θ is $-\pi < \theta \leqq \pi$. Also, find the size of the angles of the triangle whose vertices are the three points 0, α, and β on the complex plane.

例題　$\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$

両辺を α^2 で割ると　　$1 - \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 = 0$$

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$　より，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

O(0)，A(α)，B(β)とすると

$\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \dfrac{\beta}{\alpha}$　より　$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

$\left|\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0}\right| = \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = 1$　よって　OB = OA

△OAB は　$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$　であるから

求める角は $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$

問題　$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$

数学Ⅲ　複素数と図形(図形への応用) ③ 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

1．原点 O と点 A(α), B(β)について OA⊥OB であるような実数 x を求めよ。

Find a real number x such that OA ⊥ OB for the origin O and points A(α) and B(β).

例題　$\alpha = 2 + i$, $\beta = x - 2i$

OA⊥OB なら $\beta = w\alpha$ となる純虚数 $w = yi$ がある。

$x - 2i = yi(2 + i) = -y + 2yi$

よって，$x = -y$，$-2 = 2y$

$y = -1$　であるから　$x = 1$

問題　$\alpha = 3 + i$, $\beta = x - i$

2．次の△ABC において，∠BAC の大きさを求めよ。

Find the magnitude of ∠BAC in the following △ABC.

例題　A(1), B(3 + i), C(2 + 3i)

$\alpha = 1$，$\beta = 3 + i$，$\gamma = 2 + 3i$　とする。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$= \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leqq \pi$ とすると

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

よって　$\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$

問題　A(2), B(4 + 3i), C(-1 + 2i)

3．0 でない 2 つの複素数 α, β が次の等式を満たすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。
また，複素数平面上の 3 点 0, α, β を頂点とする三角形の角の大きさを求めよ。

When two non-zero complex numbers α and β satisfy the following equation, express β / α in polar form. The eccentric angle θ is $-\pi < \theta \leqq \pi$. Also, find the size of the angles of the triangle whose vertices are the three points 0, α, and β on the complex plane.

例題　$4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$

両辺を α^2 で割ると　$4 - 6\dfrac{\beta}{\alpha} + 3\dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$

$$3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 6\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - 4 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 \pm \frac{i}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\right)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

O(0), A(α), B(β)とすると

$\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ より　$\angle\mathrm{AOB} = \pm\dfrac{\pi}{6}$

$\left|\dfrac{\beta - 0}{\alpha - 0}\right| = \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ よって　$\sqrt{3}\,\mathrm{OB} = 2\,\mathrm{OA}$

△OAB は　$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$　であるから

求める角は　$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}$

問題　$4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$