数学Ⅲ　ド･モアブルの定理 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を 極 形式で 表 せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leqq \theta < 2\pi$.

例題　$-1-i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

問題　$\sqrt{3}-i$

2．次の 値 を求めよ。

Find the next value.

n が整数のとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例題　$(-1-i)^4$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ より}$$

$$(-1-i)^4$$

$$=(\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(4\times\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\times\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^4(\cos 7\pi + i\sin 7\pi)$$

$$=4\times(-1+i\times 0) = -4$$

問題　$(\sqrt{3}-i)^3$

3．次の方程式を解け。

Solve the following equation.

例題　$z^3 = -i$

z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$-i$ を極形式で表すと

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^3 = 1 \ , \ 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ (k \text{ は整数})$$

$$r>0 \text{ より } r=1 \ , \ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k = 0, 1, 2$

よって　$\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

極形式 に代入し

$$z = i, \ \frac{\sqrt{3}-i}{2}, \ \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

問題　$z^2 = 1+i$

数学Ⅲ　ド･モアブルの定理(ていり) ② 課題(かだい)　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次(つぎ)の複素数(ふくそすう)を極形式(きょくけいしき)で表(あらわ)せ。偏角(へんかく) θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題(れいだい)　$1-\sqrt{3}\, i$

絶対値(ぜったいち)を r とすると

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$1-\sqrt{3}\, i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

問題(もんだい)　$1-i$

2．次(つぎ)の値(あたい)を求(もと)めよ。

n が整数(せいすう)のとき，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

例題(れいだい)　$(1-\sqrt{3}\, i)^3$

$1-\sqrt{3}\, i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ より

$$(1-\sqrt{3}\, i)^3$$

$$=2^3\left\{\cos\left(3\times\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(3\times\frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2^3(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)$$

$$=8\times(-1+i\times 0)=-8$$

問題(もんだい)　$(1-i)^4$

3．次(つぎ)の方程式(ほうていしき)を解(と)け。

例題(れいだい)　$z^4=-4$

z の極形式(きょくけいしき)を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると

$$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$$

-4 を極形式(きょくけいしき)で表(あらわ)すと

$$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$$

絶対値(ぜったいち)と偏角(へんかく)を比較(ひかく)し

$r^4=4$ ，$4\theta=\pi+2k\pi$ （k は整数(せいすう)）

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ ，$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲(はんい)では，$k=0,1,2,3$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$

極形式(きょくけいしき)に代入(だいにゅう)し

$$z=1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$$

問題(もんだい)　$z^3=-1$

数学Ⅲ　ド･モアブルの定理 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を極形式で表せ。偏角θは $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$\sqrt{3} - i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

問題　$1 + i$

2．次の値を求めよ。

n が整数のとき,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例題　$(\sqrt{3} - i)^4$

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{ より}$$

$$(\sqrt{3} - i)^4$$

$$= 2^4\left\{\cos\left(4 \times \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(4 \times \frac{5\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= 2^4\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= 8(-1 - \sqrt{3}\,i)$$

問題　$(1 + i)^4$

3．次の方程式を解け。

例題　$z^4 = 8(-1 - \sqrt{3}\,i)$

z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

$8(-1 - \sqrt{3}\,i)$ を極形式で表すと

$$8(-1 - \sqrt{3}\,i) = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では, $k = 0, 1, 2, 3$

よって　$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

極形式に代入し

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i, \quad -\sqrt{3} + i, \quad -1 - \sqrt{3}\,i, \quad \sqrt{3} - i$$

問題　$z^4 = -4$