

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題 $-1 - i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

問題 $\sqrt{3} - i$

2. 次の値を求めよ。 Find the next value.
 n が整数のとき,
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$

例題 $(-1 - i)^4$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \text{ より}$$

$$(-1 - i)^4$$

$$= (\sqrt{2})^4 \left\{ \cos \left(4 \times \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(4 \times \frac{7\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= (\sqrt{2})^4 (\cos 7\pi + i \sin 7\pi)$$

$$= 4 \times (-1 + i \times 0) = -4$$

問題 $(\sqrt{3} - i)^3$

3. 次の方程式を解け。 Solve the following equation.

例題 $z^3 = -i$

z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると

$$z^3 = r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

$-i$ を極形式で表すと

$$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^3 = 1, \quad 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ より $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では, $k = 0, 1, 2$

よって $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

極形式に代入し

$$z = i, \quad \frac{\sqrt{3} - i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

問題 $z^2 = 1 + i$

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$

Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題 $1 - \sqrt{3} i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$1 - \sqrt{3} i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

問題 $1 - i$

2. 次の値を求めよ。

Find the next value.

n が整数のとき,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$$

例題 $(1 - \sqrt{3} i)^3$

$$1 - \sqrt{3} i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ より}$$

$$(1 - \sqrt{3} i)^3 = 2^3 \left\{ \cos \left(3 \times \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(3 \times \frac{5\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= 2^3 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi)$$

$$= 8 \times (-1 + i \times 0) = -8$$

問題 $(1 - i)^4$

3. 次の方程式を解け。

Solve the following equation.

例題 $z^4 = -4$

z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると

$$z^4 = r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

-4 を極形式で表すと

$$-4 = 4 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^4 = 4, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ より $r = \sqrt[4]{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では, $k = 0, 1, 2, 3$

よって $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

極形式に代入し

$$z = 1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 - i$$

問題 $z^3 = -1$

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$

Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題 $\sqrt{3} - i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

問題 $1 + i$

2. 次の値を求めよ。

Find the next value.

n が整数のとき、

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

例題 $(\sqrt{3} - i)^4$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \text{ より}$$

$$(\sqrt{3} - i)^4$$

$$= 2^4 \left\{ \cos \left(4 \times \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(4 \times \frac{5\pi}{6} \right) \right\}$$

$$= 2^4 \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right)$$

$$= 8 (-1 - \sqrt{3}i)$$

問題 $(1 + i)^4$

3. 次の方程式を解け。

Solve the following equation.

例題 $z^4 = 8(-1 - \sqrt{3}i)$

z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると

$$z^4 = r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

$8(-1 - \sqrt{3}i)$ を極形式で表すと

$$8(-1 - \sqrt{3}i) = 16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ より $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、 $k = 0, 1, 2, 3$

よって $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$

極形式に代入し

$$z = 1 + \sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3} + i, \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad \sqrt{3} - i$$

問題 $z^4 = -4$