

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

3. $\alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express $\alpha\beta, \frac{\alpha}{\beta}$ in polar form. Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題① $-2 + 2i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

問題① $2 - 2i$

例題② $\sqrt{3} + i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

問題② $2 + 2\sqrt{3}i$

2. $|\alpha| = 3, |\beta| = 4$ のとき、次の値を求めよ。
Find the next value when $|\alpha| = 3, |\beta| = 4$.

例題	問題
① $ \alpha^2 $ $= 3^2 = 9$	① $ \beta^2 $
② $\left \frac{\beta}{\alpha} \right $ $= \frac{4}{3}$	② $\left \frac{\alpha}{\beta} \right $

例題 $\alpha = -2 + 2i, \beta = \sqrt{3} + i$

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$|\alpha| = 2\sqrt{2}, |\beta| = 2 \text{ より}$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg \alpha = \frac{3\pi}{4}, \arg \beta = \frac{\pi}{6} \text{ より}$$

$$\arg \alpha\beta = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

問題 $\alpha = 2 - 2i, \beta = 2 + 2\sqrt{3}i$

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題①

$3 - 3i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$3 - 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

問題①

$-4 + 4i$

例題②

$-\sqrt{3} - 3i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

$\sin \theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$

$-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

問題②

$-\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

2. $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 6$ のとき、次の値を求めよ。
Find the next value when $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 6$.

例題	問題
① $ \alpha^2 $ $= 2^2 = 4$	① $ \beta^2 $
② $\left \frac{\beta}{\alpha} \right $ $= \frac{6}{2} = 3$	② $\left \frac{\alpha}{\beta} \right $

3. $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ in polar form. Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題

$\alpha = 3 - 3i$, $\beta = -\sqrt{3} - 3i$

$\alpha = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

$\beta = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

$|\alpha| = 3\sqrt{2}$, $|\beta| = 2\sqrt{3}$ より

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$

$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\arg \alpha = \frac{7\pi}{4}$, $\arg \beta = \frac{4\pi}{3}$ より

$\arg \alpha\beta = \frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{37\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$

$\alpha\beta = 6\sqrt{6} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

問題

$\alpha = -4 + 4i$, $\beta = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express the following complex numbers in polar form.
Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題① $-3 + \sqrt{3}i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$-3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

問題① $\sqrt{3} - 3i$

例題② $-3 - 3i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$-3 - 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

問題② $\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

2. $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 2$ のとき、次の値を求めよ。
Find the next value when $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 6$.

例題	問題
① $ \alpha^2 $ $= 1^2 = 1$	① $ \beta^2 $
② $\left \frac{\beta}{\alpha^2} \right $ $= \frac{2}{1} = 2$	② $\left \frac{\alpha}{\beta^2} \right $

3. $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
Express $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ in polar form. Declination angle θ is $0 \leq \theta < 2\pi$.

例題 $\alpha = -3 + \sqrt{3}i$, $\beta = -3 - 3i$

$$\alpha = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\beta = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$|\alpha| = 2\sqrt{3}, |\beta| = 3\sqrt{2} \text{ より}$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{6}$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\arg \alpha = \frac{5\pi}{6}, \arg \beta = \frac{5\pi}{4} \text{ より}$$

$$\arg \alpha\beta = \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{4} = \frac{25\pi}{12}$$

$$\arg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$$

$$\alpha\beta = 6\sqrt{6} \left(\cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

問題 $\alpha = \sqrt{3} - 3i$, $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$

1. 次の点は、点をどのように回転した点であるか。
ただし、回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。
How is the next point rotated around point z ? $-\pi < \theta \leq \pi$

例題 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$

$= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)z$ より

点を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ 回転した

問題 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

2. 点を原点を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。
Find the complex number w that represents the point z rotated by the following angle θ around the origin.

例題 $z = 4 - 2i, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

$w = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)z$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4 - 2i)$

$= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times (-2i) + \frac{\sqrt{3}}{2}i \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \times (-2i)$

$= 2 - i + 2\sqrt{3}i + \sqrt{3}$

$= (2 + \sqrt{3}) + (-1 + 2\sqrt{3})i$

問題 $z = 2 - 4i, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

3. 点を点を点を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。
Find the complex number γ that represents point β rotated by the following angle θ around point α .

例題 $\beta = 4 + 3i, \quad \alpha = 2 - i, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

α を原点に移す平行移動で、 β, γ がそれぞれ β', γ' に移るとすると

$\beta' = \beta - \alpha = (4 + 3i) - (2 - i) = 2 + 4i$

$\gamma' = \gamma - \alpha$

γ' は β' を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ 回転した点だから

$\gamma' = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)(2 + 4i)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + 4i)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4i + \frac{1}{2}i \times 2 + \frac{1}{2}i \times 4i$

$= (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i$

$\gamma = \gamma' + \alpha$

$= (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 2)i + (2 - i)$

$= \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 1)i$

問題 $\beta = 3 + 3i, \quad \alpha = 1 - i, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

1. 次の点は、点 z をどのように回転した点であるか。
ただし、回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。
How is the next point rotated around point z ? $-\pi < \theta \leq \pi$

例題 $-i z$

$$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) z$$
より
点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ 回転した

問題 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) z$

2. 点 z を原点を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。
Find the complex number w that represents the point z rotated by the following angle θ around the origin.

例題 $z = 2 + 4i, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

$$w = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) (2 + 4i)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4i + \frac{1}{2} i \times 2 + \frac{1}{2} i \times 4i$$
$$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i + i - 2$$
$$= (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 1)i$$

問題 $z = \sqrt{3} + 2i, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$

3. 点 β を点 α を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。
Find the complex number γ that represents point β rotated by the following angle θ around point α .

例題 $\beta = 4 - i, \quad \alpha = 2 + i, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

α を原点に移す平行移動で、 β, γ がそれぞれ β', γ' に移るとすると
 $\beta' = \beta - \alpha = (4 - i) - (2 + i) = 2 - 2i$
 $\gamma' = \gamma - \alpha$
 γ' は β' を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ 回転した点だから
$$\gamma' = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (2 - 2i)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) (2 - 2i)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-2i) + \frac{\sqrt{2}}{2} i \times 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} i \times (-2i)$$
$$= \sqrt{2} i$$

$$\gamma = \gamma' + \alpha$$
$$= \sqrt{2} i + (2 + i) = 2 + (\sqrt{2} + 1)i$$

問題 $\beta = 3 + i, \quad \alpha = 1 - 2i, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

1. 次の点は、点 z をどのように回転した点であるか。
ただし、回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。
How is the next point rotated around point z ? $-\pi < \theta \leq \pi$

例題 $-z$

$$= \left(\cos\left(-\pi\right) + i \sin\left(-\pi\right) \right) z$$
より
点 z を原点を中心として $-\pi$ 回転した

問題 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) z$

2. 点 z を原点を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。
Find the complex number w that represents the point z rotated by the following angle θ around the origin.

例題 $z = 4 + 2i, \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} w &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) z \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (4 + 2i) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2i + \frac{1}{2}i \times 4 + \frac{1}{2}i \times 2i \\ &= -2\sqrt{3} - \sqrt{3}i + 2i - 1 \\ &= (-2\sqrt{3} - 1) + (-\sqrt{3} + 2)i \end{aligned}$$

問題 $z = \sqrt{3} + 2i, \theta = \frac{\pi}{3}$

3. 点 β を点 α を中心として、次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。
Find the complex number γ that represents point β rotated by the following angle θ around point α .

例題 $\beta = 3 + i, \alpha = 1 - i, \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ を原点に移す平行移動で, } \beta, \gamma \text{ がそれぞれ } \beta', \gamma' \\ &\text{に移るとすると} \\ &\beta' = \beta - \alpha = (3 + i) - (1 - i) = 2 + 2i \\ &\gamma' = \gamma - \alpha \\ &\gamma' \text{ は } \beta' \text{ を原点を中心として } \frac{\pi}{3} \text{ 回転した点だから} \\ &\gamma' = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (2 + 2i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 + 2i) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2i + \frac{\sqrt{3}}{2}i \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \times 2i \\ &= (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i \\ &\gamma = \gamma' + \alpha \\ &= (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i + (1 - i) \\ &= (2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

問題 $\beta = 4 + i, \alpha = 2 - i, \theta = \frac{2\pi}{3}$