数学Ⅲ　複素数の極形式 ①　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

Express the following complex numbers in polar form. Declination angle θ is $0 \leqq \theta < 2\pi$.

例題①　$-2+2i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

問題①　$2-2i$

例題②　$\sqrt{3}+i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

問題②　$2+2\sqrt{3}\,i$

2．$|\alpha|=3,\ |\beta|=4$ のとき，次の値を求めよ。

Find the next value when $|\alpha|=3,\ |\beta|=4$.

例題	問題
① $\lvert\alpha^2\rvert$ $=3^2=9$	① $\lvert\beta^2\rvert$
② $\left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert$ $=\frac{4}{3}$	② $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert$

3．$\alpha\beta,\ \frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

Express $\alpha\beta,\ \frac{\alpha}{\beta}$ in polar form. Declination angle θ is $0 \leqq \theta < 2\pi$.

例題　$\alpha=-2+2i,\ \beta=\sqrt{3}+i$

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$|\alpha|=2\sqrt{2},\ |\beta|=2$ より

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$\arg\alpha=\frac{3\pi}{4},\quad \arg\beta=\frac{\pi}{6}$ より

$$\arg\alpha\beta=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{12}$$

$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$$

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

問題　$\alpha=2-2i,\ \beta=2+2\sqrt{3}\,i$

数学Ⅲ　複素数の極形式②　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を極形式で表せ。偏角θは $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題①　$3-3i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \theta=\frac{7\pi}{4}$$

$$3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

問題①　$-4+4i$

例題②　$-\sqrt{3}-3i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \theta=\frac{4\pi}{3}$$

$$-\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

問題②　$-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$

2．$|\alpha|=2$，$|\beta|=6$ のとき，次の値を求めよ。

例題	問題
① $\lvert\alpha^2\rvert$ $=2^2=4$	① $\lvert\beta^2\rvert$
② $\left\lvert\dfrac{\beta}{\alpha}\right\rvert$ $=\dfrac{6}{2}=3$	② $\left\lvert\dfrac{\alpha}{\beta}\right\rvert$

3．$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角θは $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$\alpha=3-3i$，$\beta=-\sqrt{3}-3i$

$$\alpha=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\beta=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$|\alpha|=3\sqrt{2}$，$|\beta|=2\sqrt{3}$　より

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=6\sqrt{6}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\arg\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$，$\arg\beta=\dfrac{4\pi}{3}$　より

$$\arg\alpha\beta=\frac{7\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}=\frac{37\pi}{12}=\frac{13\pi}{12}$$

$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$$

$$\alpha\beta=6\sqrt{6}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

問題　$\alpha=-4+4i$，$\beta=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$

数学Ⅲ　複素数の極形式③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を極形式で表せ。偏角θは $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題①　$-3+\sqrt{3}\,i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2},\quad \theta=\frac{5\pi}{6}$$

$$-3+\sqrt{3}\,i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

問題①　$\sqrt{3}-3i$

例題②　$-3-3i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \theta=\frac{5\pi}{4}$$

$$-3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

問題②　$\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$

2．$|\alpha|=1$，$|\beta|=2$ のとき，次の値を求めよ。

例題	問題
① $\lvert\alpha^2\rvert$ $=1^2=1$ ② $\left\lvert\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right\rvert$ $=\dfrac{2}{1}=2$	① $\lvert\beta^2\rvert$ ② $\left\lvert\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right\rvert$

3．$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。偏角θは $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$\alpha=-3+\sqrt{3}\,i$，$\beta=-3-3i$

$$\alpha=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{5}\right)$$

$$\beta=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$|\alpha|=2\sqrt{3}$，$|\beta|=3\sqrt{2}$　より

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{6}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\arg\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$，$\arg\beta=\dfrac{5\pi}{4}$ より

$$\arg\alpha\beta=\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi}{4}=\frac{25\pi}{12}$$

$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{4}=-\frac{5\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

$$\alpha\beta=6\sqrt{6}\left(\cos\frac{25\pi}{12}+i\sin\frac{25\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

問題　$\alpha=\sqrt{3}-3i$，$\beta=\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$

数学Ⅲ　複素数の極形式(回転) ①　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の点は，点 z をどのように回転した点であるか。
ただし，回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

例題　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$

$=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z$　より

点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した

問題　$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

2．点 z を原点を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

例題　$z=4-2i$，　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$w=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)z$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$=\dfrac{1}{2}\times4+\dfrac{1}{2}\times(-2i)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times(-2i)$

$=2-i+2\sqrt{3}i+\sqrt{3}$

$=(2+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i$

問題　$z=2-4i$，　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

3．点 β を点 α を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

例題　$\beta=4+3i$，　$\alpha=2-i$，　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

α を原点に移す平行移動で，β，γ がそれぞれ β′，γ′ に移るとすると

$\beta'=\beta-\alpha=(4+3i)-(2-i)=2+4i$

$\gamma'=\gamma-\alpha$

γ′は β′を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点だから

$\gamma'=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(2+4i)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(2+4i)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4i+\dfrac{1}{2}i\times4+\dfrac{1}{2}i\times4i$

$=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+2)i$

$\gamma=\gamma'+\alpha$

$=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+2)i+(2-i)$

$=\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+1)i$

問題　$\beta=3+3i$，　$\alpha=1-i$，　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

数学Ⅲ　複素数の極形式(回転) ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の点は，点 z をどのように回転した点であるか。
ただし，回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

例題　$-iz$

$$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)z \text{ より}$$

点 z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した

問題　$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

2．点 z を原点を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

例題　$z = 2+4i$，　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$w = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2+4i)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4i+\frac{1}{2}i\times 2+\frac{1}{2}i\times 4i$$

$$= \sqrt{3}+2\sqrt{3}\,i+i-2$$

$$= (\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i$$

問題　$z = \sqrt{3}+2i$　，　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

3．点 β を点 α を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

例題　$\beta = 4-i$，　$\alpha = 2+i$，　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

α を原点に移す平行移動で，β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

$$\beta' = \beta-\alpha = (4-i)-(2+i) = 2-2i$$

$$\gamma' = \gamma-\alpha$$

γ' は β' を原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点だから

$$\gamma' = \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(2-2i)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2-2i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-2i)+\frac{\sqrt{2}}{2}i\times 2+\frac{\sqrt{2}}{2}i\times(-2i)$$

$$= \sqrt{2}\,i$$

$$\gamma = \gamma'+\alpha$$

$$= \sqrt{2}i+(2+i) = 2+(\sqrt{2}+1)i$$

問題　$\beta = 3+i$，　$\alpha = 1-2i$，　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

数学Ⅲ　複素数の極形式(回転)③　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の点は，点 z をどのように回転した点であるか。
ただし，回転角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

例題　$-z$

$= \left(\cos\left(-\ \ \pi\ \ \right)+ i\sin\left(-\ \ \pi\ \ \right)\right) z$ より

点 z を原点を中心として $-\ \ \pi$ 　回転した

問題　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$

2．点 z を原点を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

例題　$z = 4 + 2i$，$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$w = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) z$

$= \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)(4+2i)$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2i + \dfrac{1}{2}i\times 4 + \dfrac{1}{2}i\times 2i$

$= -2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i + 2i - 1$

$= (-2\sqrt{3} - 1) + (-\sqrt{3} + 2)i$

問題　$z = \sqrt{3} + 2i$，　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

3．点 β を点 α を中心として，次の角 θ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

例題　$\beta = 3 + i$，　$\alpha = 1 - i$，　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

α を原点に移す平行移動で，β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

$\beta' = \beta - \alpha = (3+i) - (1-i) = 2 + 2i$

$\gamma' = \gamma - \alpha$

γ' は β' を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点だから

$\gamma' = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(2+2i)$

$= \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)$

$= \dfrac{1}{2}\times 2 + \dfrac{1}{2}\times 2i +$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\times 2i$

$= (1-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i$

$\gamma = \gamma' + \alpha$

$= (1-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i + (1-i)$

$= (2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}\,i$

問題　$\beta = 4 + i$，　$\alpha = 2 - i$，　$\theta = \dfrac{2\pi}{3}$