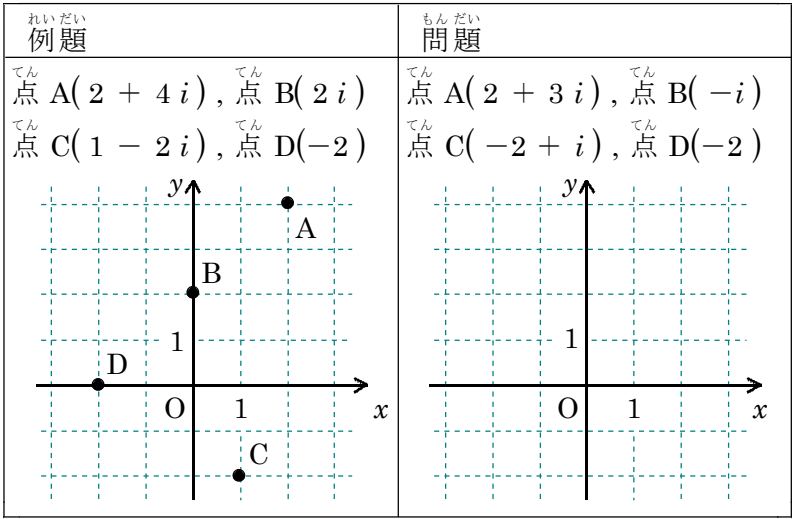


数学Ⅲ 複素数平面 ① 課題

1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。  
Draw the following points on the complex plane.



2. z = a + bi において、次の問いに答えよ。  
Answer the following questions at z=a+bi.

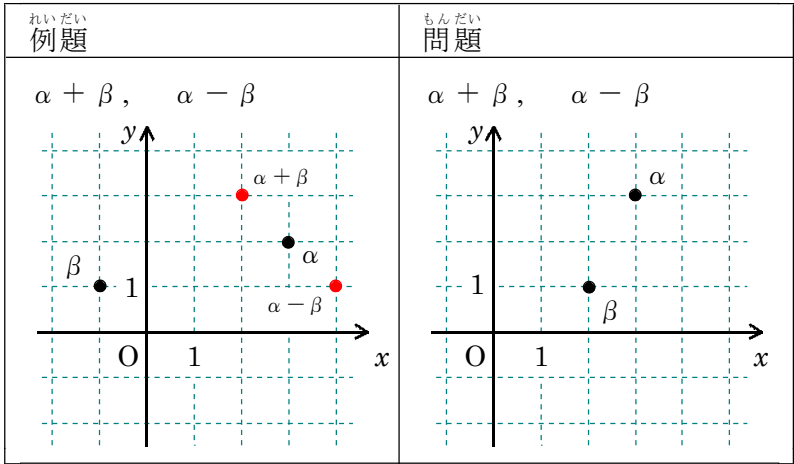
例題	問題
① a を z, z̄ で表せ。 Express a by z and z̄	① b を z, z̄ で表せ。
z̄ = a - bi より z + z̄ = 2a a = (z + z̄) / 2	
② z が実数と z = z̄ が 同値なことを示せ。 Show that z is a real number and z = z̄ is equivalent.	② z が純虚数と z = -z̄ が 同値なことを示せ。 Show that z is a pure imaginary number and z = -z̄
z が実数なら b=0 になり, z = z̄ = a になる。 z = z̄ のとき, b=0 になり z=a で z が実数になる。	

3. 次の複素数の絶対値を求めよ。  
Find the absolute value of the following complex number.

例題	問題
① -3 ※実数 real number  -3  = 3	① 5
② 2i ※純虚数 pure imaginary number  2i  = 2	② -4i
③ 1 - 2i  1 - 2i  = √(1² + (-2)²) = √5	③ -1 + 2i

( )年( )組( )番( )

4. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。  
Draw the following points for the following points on the complex plane.



5. 次の2点間の距離を求めよ。  
Find the distance between the following two points.

例題 A(1 + 2i), B(4 - 2i) AB =  (4 - 2i) - (1 + 2i)  =  3 - 4i  = √(3² + (-4)²) = √25 = 5	問題 C(-2 + 5i), D(6 - i)
---	-------------------------

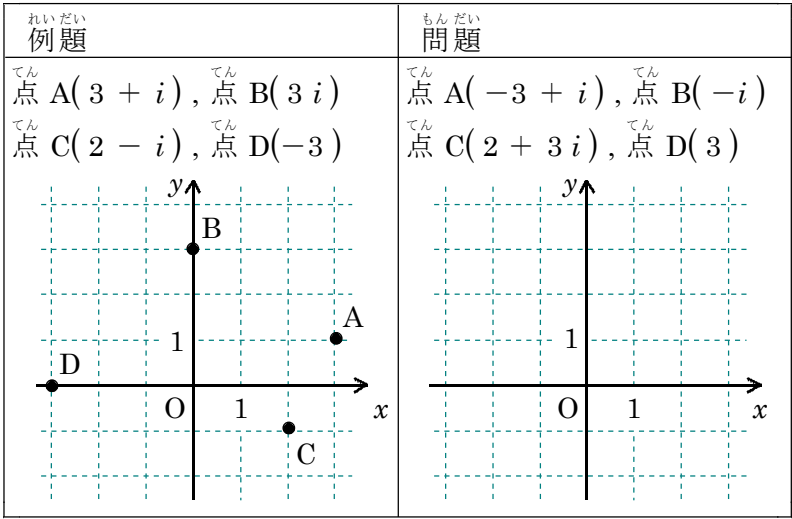
6. 2点 A, B と原点 O が同一直線上にあるとき、実数 x を求めよ。  
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

例題 A(x + 2i), B(4 - 2i) x + 2i = k(4 - 2i) から x = 4k, 2 = -2k よって, k = -1, x = 4 × (-1) = -4	問題 A(x + 3i), B(2 - i)
---	------------------------

7. 次の複素数の値を求めよ。  
Find the value of the following complex number.

例題	問題
α + β = 2i のとき, α + β̄ を求めよ。 α + β̄ = 2ī = -2i α + β̄ = α + β̄ = -2i	α - β = 3 のとき, α - β̄ を求めよ。

1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。  
Draw the following points on the complex plane.



2.  $z = a + bi$ において、次の問いに答えよ。  
Answer the following questions at  $z=a+bi$ .

例題  $|\alpha| = 1$  のとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$  は実数である。  
real number

$|\alpha| = 1$  のとき、 $|\alpha|^2 = 1$  であるから

$\alpha \overline{\alpha} = 1$  すなわち  $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

よって  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \overline{\alpha}$

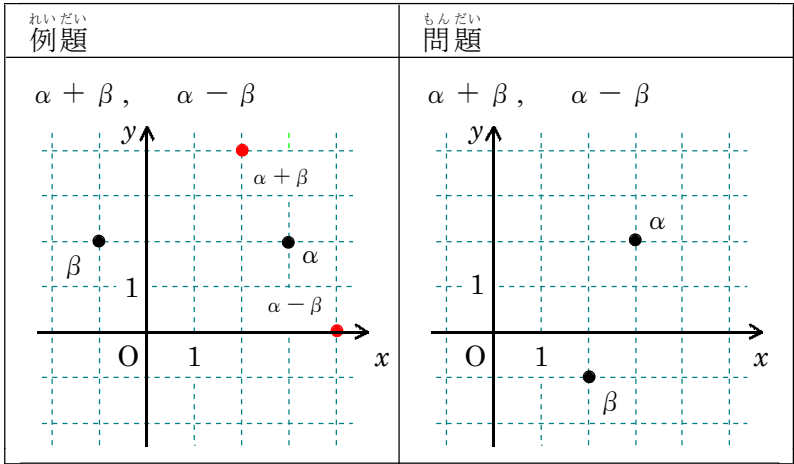
$\alpha + \overline{\alpha}$  は実数であるから  $\alpha + \frac{1}{\alpha}$  も実数である。  
Q.E.D

問題  $|\alpha| = 1$  のとき、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$  は実数である。

3. 次の複素数の絶対値を求めよ。  
Find the absolute value of the following complex number.

例題	問題
① $-5$ ※実数 $ -5  = 5$	① $7$
② $-3i$ ※純虚数 $ -3i  = 3$	② $i$
③ $3-i$ $ 3-i $ $= \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$	③ $-3+4i$

4. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。  
Draw the following points for the following points on the complex plane.



5. 次の2点間の距離を求めよ。  
Find the distance between the following two points.

例題  $A(-2+3i)$ ,  $B(4-5i)$   
 $AB = |(4-5i) - (-2+3i)| = |6-8i|$   
 $= \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

問題  $C(-2+3i)$ ,  $D(1-i)$

6. 2点A, Bと原点Oが同一直線上にあるとき、実数xを求めよ。  
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

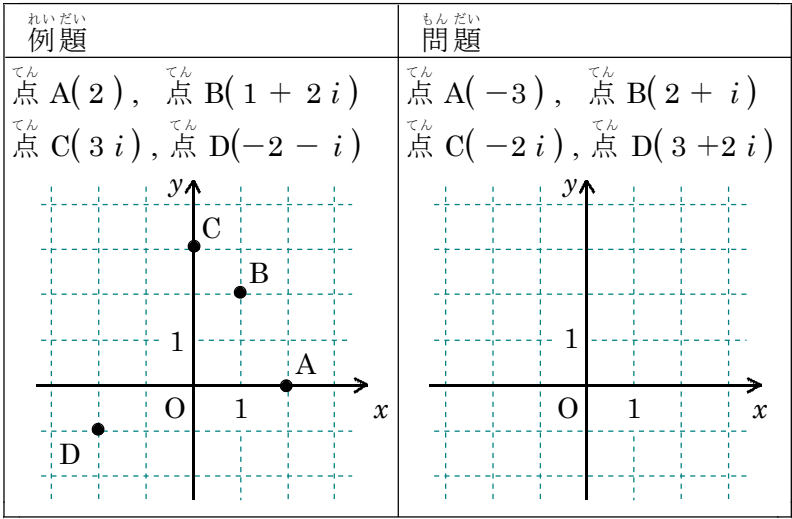
例題  $A(x+4i)$ ,  $B(2-i)$   
 $x+4i = k(2-i)$  から  
 $x = 2k$ ,  $4 = -k$   
よって、 $k = -4$ ,  $x = 2 \times (-4) = -8$

問題  $A(x+3i)$ ,  $B(2+i)$

7. 次の複素数の値を求めよ。  
Find the value of the following complex number.

例題	問題
<p><math>\alpha - \beta = 3i</math> のとき、 <math>\overline{\alpha - \beta}</math> を求めよ。 <math>\overline{\alpha - \beta} = \overline{3i} = -3i</math> <math>\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha - \beta} = -3i</math></p>	<p><math>\alpha + \beta = 2</math> のとき、 <math>\overline{\alpha + \beta}</math> を求めよ。</p>

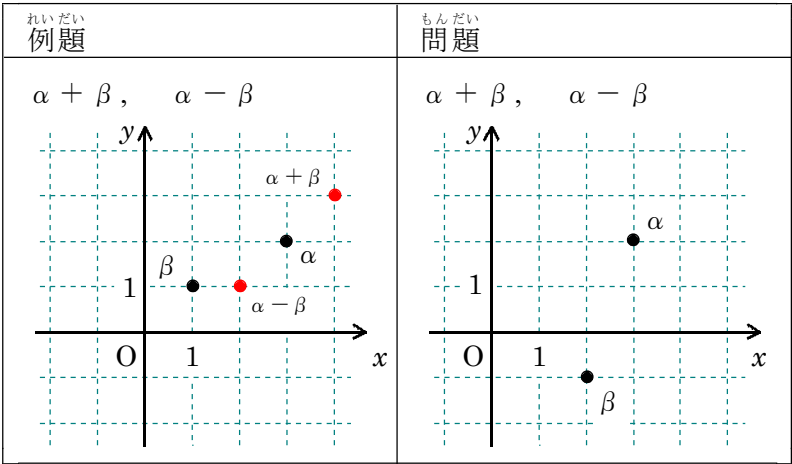
1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。  
Draw the following points on the complex plane.



2. 次の値を求めよ。  
Find the next value.

<p>例題① <math>z = 2 - 3i</math> のとき</p> <p>(1) <math>\bar{z}</math></p> <p><math>= 2 + 3i</math></p> <p>(2) <math>-\bar{z}</math></p> <p><math>= -2 - 3i</math></p> <p>(3) <math>\frac{z + \bar{z}}{2}</math></p> <p><math>= \frac{(2 - 3i) + (2 + 3i)}{2}</math></p> <p><math>= 2</math></p> <p>(4) <math>\frac{z - \bar{z}}{2}</math></p> <p><math>= \frac{(2 - 3i) - (2 + 3i)}{2}</math></p> <p><math>= -3i</math></p> <p>(5) <math> z </math></p> <p><math>= \sqrt{2^2 + (-3)^2}</math></p> <p><math>= \sqrt{13}</math></p>	<p>問題① <math>z = 1 - 2i</math> のとき</p> <p>(1) <math>\bar{z}</math></p> <p>(2) <math>-\bar{z}</math></p> <p>(3) <math>\frac{z + \bar{z}}{2}</math></p> <p>(4) <math>\frac{z - \bar{z}}{2}</math></p> <p>(5) <math> z </math></p>
<p>例題② <math>z = 3i</math> のとき</p> <p>(1) <math>\bar{z}</math></p> <p><math>= -3i</math></p> <p>(2) <math>-\bar{z}</math></p> <p><math>= -(-3i) = 3i</math></p> <p>(3) <math> z </math></p> <p><math>=  3i  = 3</math></p>	<p>問題② <math>z = 2i</math> のとき</p> <p>(1) <math>\bar{z}</math></p> <p>(2) <math>-\bar{z}</math></p> <p>(3) <math> z </math></p>

3. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。  
Draw the following points for the following points on the complex plane.



4. 次の2点間の距離を求めよ。  
Find the distance between the following two points.

<p>例題 A(2 + 4i), B(10 - 2i)</p> <p><math>AB =  (10 - 2i) - (2 + 4i)  =  8 - 6i </math></p> <p><math>= \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10</math></p>	<p>問題 C(-2 + 5i), D(1 + i)</p>
--	--------------------------------

5. 2点 A, B と原点 O が同一直線上にあるとき、実数 x を求めよ。  
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

<p>例題 A(x + 3i), B(2 - i)</p> <p><math>x + 3i = k(2 - i)</math> から</p> <p><math>x = 2k</math>, <math>3 = -k</math></p> <p>よって, <math>k = -3</math>, <math>x = 2 \times (-3) = -6</math></p>	<p>問題 A(x - 2i), B(2 + i)</p>
---	-------------------------------

6. 次の複素数の値を求めよ。  
Find the value of the following complex number.

例題	問題
<p><math>\alpha + \beta = 1 + 2i</math> のとき,</p> <p><math>\overline{\alpha + \beta}</math> を求めよ。</p> <p><math>\overline{\alpha + \beta} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i</math></p> <p><math>\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta} = 1 - 2i</math></p>	<p><math>\alpha - \beta = 3 - i</math> のとき,</p> <p><math>\overline{\alpha - \beta}</math> を求めよ。</p>

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題	問題
$z = 1 + \sqrt{3} i$ のとき、 次の値を求めよ。	$z = 2 + \sqrt{5} i$ のとき、 次の値を求めよ。
① $ z $ $= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$	① $ z $
② $\bar{z}$ $= 1 - \sqrt{3} i$	② $\bar{z}$
③ $z \bar{z}$ $= (1 + \sqrt{3} i)(1 - \sqrt{3} i)$ $= 1^2 - (\sqrt{3} i)^2 = 4$	③ $z \bar{z}$
④ $z + \bar{z}$ $= (1 + \sqrt{3} i) + (1 - \sqrt{3} i)$ $= 2$	④ $z + \bar{z}$

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題 $ z  = 3$ かつ $ z - 4  = 3$ を満たす複素数 について、次の値を求めよ。
① $z \bar{z}$ $z \bar{z} =  z ^2 = 3^2 = 9$
② $z + \bar{z}$ $ z - 4 ^2 = (z - 4)(\overline{z - 4}) = (z - 4)(\bar{z} - 4)$ $= z \bar{z} - 4(z + \bar{z}) + 16$ $= -4(z + \bar{z}) + 25 = 9$ $-4(z + \bar{z}) = -16$ より $z + \bar{z} = 4$

問題 $ z  = 2$ かつ $ z - 2  = 2$ を満たす複素数に ついて、次の値を求めよ。
① $z \bar{z}$
② $z + \bar{z}$

3. 複素数  $\alpha, \beta$  が条件を満たすとき、次の値を求めよ。  
When the complex numbers  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy the conditions,  
find the following values.

例題 条件 $ \alpha  = 3,  \beta  = 4,  \alpha + \beta  = 5$
① $\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta$ $  \alpha + \beta  ^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$ $= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$ $= \alpha \bar{\alpha} + \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta + \beta \bar{\beta}$ $=  \alpha ^2 + \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta +  \beta ^2$ $= 3^2 + \alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta + 4^2 = 5^2$ $\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta = 5^2 - 3^2 - 4^2 = 0$
② $ \alpha - \beta $ $  \alpha - \beta  ^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$ $= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$ $= \alpha \bar{\alpha} - \alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta + \beta \bar{\beta}$ $=  \alpha ^2 - (\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta) +  \beta ^2$ $= 3^2 - 0 + 4^2 = 25$ $  \alpha - \beta   \geq 0$ より $  \alpha - \beta   = \sqrt{25} = 5$

問題 条件 $ \alpha  = 2,  \beta  = 3,  \alpha + \beta  = 4$
① $\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta$
② $ \alpha - \beta $

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題	問題
$z = 2 + \sqrt{5} i$ のとき、 次の値を求めよ。	$z = 1 + \sqrt{3} i$ のとき、 次の値を求めよ。
① $ z $ $= \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$	① $ z $
② $\bar{z}$ $= 2 - \sqrt{5} i$	② $\bar{z}$
③ $z\bar{z}$ $= (2 + \sqrt{5} i)(2 - \sqrt{5} i)$ $= 2^2 - (\sqrt{5} i)^2 = 9$	③ $z\bar{z}$
④ $z + \bar{z}$ $= (2 + \sqrt{5} i) + (2 - \sqrt{5} i)$ $= 4$	④ $z + \bar{z}$

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題 $ z  = 3$ かつ $z + \bar{z} = 4$ を満たす複素数 $z$ を求めよ。  $z\bar{z} =  z ^2 = 3^2 = 9$ , $z + \bar{z} = 4$ より $z, \bar{z}$ は2次方程式 $x^2 - 4x + 9 = 0$ の2解  $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1}$  $= \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5} i}{2} = 2 \pm \sqrt{5} i$  よって、 $z = 2 \pm \sqrt{5} i$
--

問題 $ z  = 2$ かつ $z + \bar{z} = 2$ を満たす複素数 $z$ を求めよ。
---

3. 複素数  $\alpha, \beta$  が条件を満たすとき、次の値を求めよ。  
When the complex numbers  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy the conditions, find the following values.

例題 条件 $ \alpha  = 2,  \beta  = 3,  \alpha - \beta  = 4$
① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$  $\begin{aligned}  \alpha - \beta ^2 &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} \\ &=  \alpha ^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta +  \beta ^2 \\ &= 2^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 3^2 = 4^2 \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta &= 2^2 + 3^2 - 4^2 = -3 \end{aligned}$
② $ \alpha + \beta $  $\begin{aligned}  \alpha + \beta ^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} \\ &=  \alpha ^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) +  \beta ^2 \\ &= 2^2 - 3 + 3^2 = 10 \end{aligned}$  $ \alpha + \beta  \geq 0$ より $ \alpha + \beta  = \sqrt{10}$

問題 条件 $ \alpha  = 3,  \beta  = 4,  \alpha - \beta  = 5$
① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$
② $ \alpha + \beta $

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

3. 複素数  $\alpha, \beta$  が条件を満たすとき、次の値を求めよ。  
When the complex numbers  $\alpha$  and  $\beta$  satisfy the conditions, find the following values.

例題	問題
$z = \sqrt{3} - i$ のとき、 次の値を求めよ。  ① $ z $ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$  ② $\bar{z}$ $= \sqrt{3} + i$  ③ $z\bar{z}$ $= (\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)$ $= (\sqrt{3})^2 - i^2 = 4$  ④ $z + \bar{z}$ $= (\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} + i)$ $= 2\sqrt{3}$	$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ のとき、 次の値を求めよ。  ① $ z $   ② $\bar{z}$   ③ $z\bar{z}$   ④ $z + \bar{z}$

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題  $|z| = 2$  かつ  $z + \bar{z} = 2\sqrt{3}$  を満たす複素数  $z$  を求めよ。

$z\bar{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$  ,  $z + \bar{z} = 2\sqrt{3}$  より

$z, \bar{z}$  は2次方程式  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$  の2解

$$x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$$

よって、 $z = \sqrt{3} \pm i$

問題  $|z| = 2$  かつ  $z + \bar{z} = 2\sqrt{2}$  を満たす複素数  $z$  を求めよ。

例題 条件  $|\alpha| = 4$  ,  $|\beta| = 5$  ,  $|\alpha - \beta| = 6$

①  $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta|^2 &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} \\ &= |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2 \\ &= 4^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 5^2 = 6^2 \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta &= 4^2 + 5^2 - 6^2 = 5 \end{aligned}$$

②  $|\alpha + \beta|$

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} \\ &= |\alpha|^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2 \\ &= 4^2 + 5 + 5^2 = 46 \end{aligned}$$

$|\alpha + \beta| \geq 0$  より  $|\alpha + \beta| = \sqrt{46}$

問題 条件  $|\alpha| = 5$  ,  $|\beta| = 4$  ,  $|\alpha - \beta| = 3$

①  $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

②  $|\alpha + \beta|$