

数学III 複素数平面 ① 課題

()年()組()番()

1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。
Draw the following points on the complex plane.

| 例題 | 問題 |
|--|--|
| 点 A(2 + 4i), 点 B(2i) 点 C(1 - 2i), 点 D(-2) | 点 A(2 + 3i), 点 B(-i) 点 C(-2 + i), 点 D(-2) |
| | |

2. $z = a + bi$ において、次の問いに答えよ。
Answer the following questions at $z = a + bi$.

| 例題 | 問題 |
|---|--|
| ① a を z, \bar{z} で表せ。 Express a by z and \bar{z} | ① b を z, \bar{z} で表せ。 |
| $\bar{z} = a - bi$ より $z + \bar{z} = 2a$ $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ | |
| ② z が実数と $z = \bar{z}$ が同値なことを示せ。 Show that z is a real number and $z = \bar{z}$ is equivalent. | ② z が純虚数と $z = -\bar{z}$ が同値なことを示せ。 Show that z is a pure imaginary number and $z = -\bar{z}$ |
| z が実数なら $b=0$ になり、 $z = \bar{z} = a$ になる。 $z = \bar{z}$ のとき、 $b=0$ になり $z = a$ で z が実数になる。 | |

3. 次の複素数の絶対値を求めよ。
Find the absolute value of the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|-------------|
| ① -3 ※実数 real number $ -3 = 3$ | ① 5 |
| ② $2i$ ※純虚数 pure imaginary number $ 2i = 2$ | ② $-4i$ |
| ③ $1 - 2i$ $ 1 - 2i $ $= \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ | ③ $-1 + 2i$ |

4. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。
Draw the following points for the following points on the complex plane.

| 例題 | 問題 |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ | $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ |

5. 次の2点間の距離を求めよ。
Find the distance between the following two points.

| |
|---|
| 例題 $A(1 + 2i), B(4 - 2i)$ $AB = (4 - 2i) - (1 + 2i) = 3 - 4i $ $= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ |
| 問題 $C(-2 + 5i), D(6 - i)$ |

6. 2点A, Bと原点Oが同一直線上にあるとき、実数xを求めよ。
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

| |
|--|
| 例題 $A(x + 2i), B(4 - 2i)$ $x + 2i = k(4 - 2i)$ から $x = 4k, 2 = -2k$ よって、 $k = -1, x = 4 \times (-1) = -4$ |
| 問題 $A(x + 3i), B(2 - i)$ |

7. 次の複素数の値を求めよ。
Find the value of the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|--|
| $\alpha + \beta = 2i$ のとき、 $\overline{\alpha + \beta}$ を求めよ。 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{2i} = -2i$ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -2i$ | $\alpha - \beta = 3$ のとき、 $\overline{\alpha - \beta}$ を求めよ。 |

数学III 複素数平面 (2) 課題

()年()組()番()

1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。
Draw the following points on the complex plane.

| 例題 | 問題 |
|--|---|
| 点 A(3 + i), 点 B(3i) 点 C(2 - i), 点 D(-3) | 点 A(-3 + i), 点 B(-i) 点 C(2 + 3i), 点 D(3) |
| | |

2. $z = a + bi$ において、次の問いに答えよ。
Answer the following questions at $z = a + bi$.

| |
|--|
| 例題 $ \alpha = 1$ のとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ は実数である。 (real number) |
| $ \alpha = 1$ のとき、 $ \alpha ^2 = 1$ であるから $\alpha \bar{\alpha} = 1$ すなわち $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$ よって $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha}$ $\alpha + \bar{\alpha}$ は実数であるから $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ も実数である。 Q.E.D |
| 問題 $ \alpha = 1$ のとき、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ は実数である。 |

3. 次の複素数の絶対値を求めよ。
Find the absolute value of the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|-----------|
| ① -5 ※実数 $ -5 = 5$ | ① 7 |
| ② -3i ※純虚数 $ -3i = 3$ | ② i |
| ③ 3 - i $ 3 - i = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ | ③ -3 + 4i |

4. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。
Draw the following points for the following points on the complex plane.

| 例題 | 問題 |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ | $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ |

5. 次の2点間の距離を求めよ。
Find the distance between the following two points.

| |
|---|
| 例題 A(-2 + 3i), B(4 - 5i) $AB = (4 - 5i) - (-2 + 3i) = 6 - 8i $ $= \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$ |
| 問題 C(-2 + 3i), D(1 - i) |

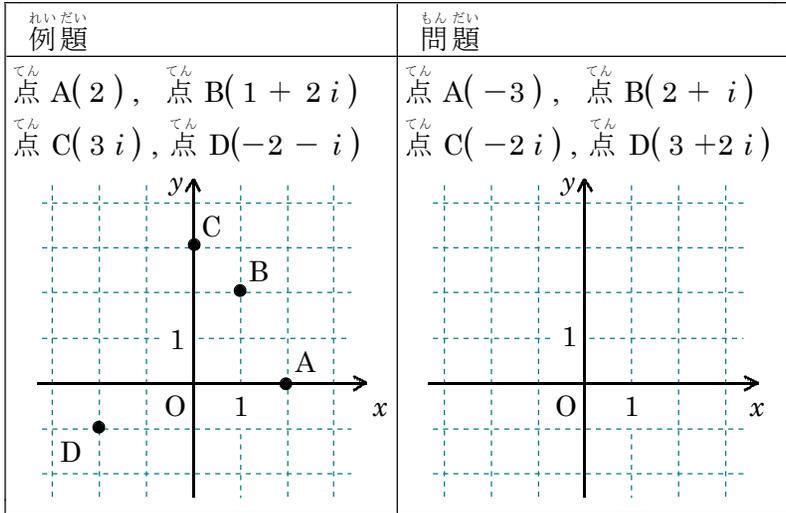
6. 2点A, Bと原点Oが同一直線上にあるとき、実数xを求めよ。
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

| |
|---|
| 例題 A(x + 4i), B(2 - i) $x + 4i = k(2 - i)$ から $x = 2k, 4 = -k$ よって、 $k = -4, x = 2 \times (-4) = -8$ |
| 問題 A(x + 3i), B(2 + i) |

7. 次の複素数の値を求めよ。
Find the value of the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|---|--|
| $\alpha - \beta = 3i$ のとき、 $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$ を求めよ。 $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{3i}{3i} = 1$ $\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$ | $\alpha + \beta = 2$ のとき、 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta}$ を求めよ。 |

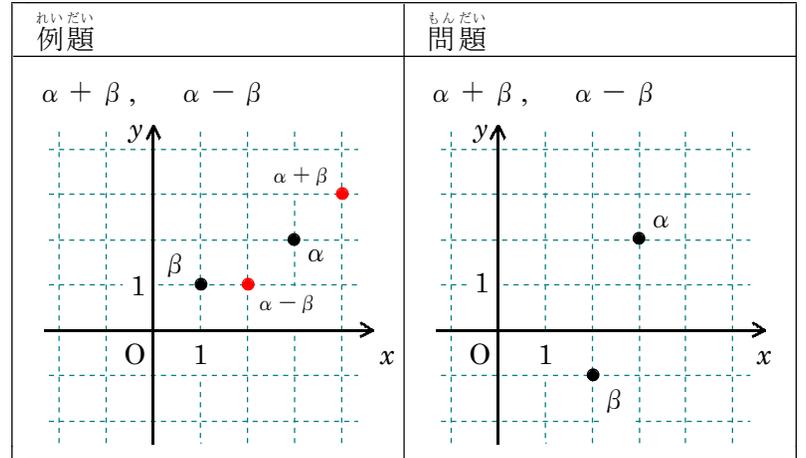
1. 複素数平面上に、次の点を図示しなさい。
Draw the following points on the complex plane.



2. 次の値を求めよ。
Find the next value.

| 例題 | 問題 |
|---|--|
| 例題① $z = 2 - 3i$ のとき (1) \bar{z} $= 2 + 3i$ (2) $-\bar{z}$ $= -2 - 3i$ (3) $\frac{z + \bar{z}}{2}$ $= \frac{(2-3i) + (2+3i)}{2}$ $= 2$ (4) $\frac{z - \bar{z}}{2}$ $= \frac{(2-3i) - (2+3i)}{2}$ $= -3i$ (5) $ z $ $= \sqrt{2^2 + (-3)^2}$ $= \sqrt{13}$ | 問題① $z = 1 - 2i$ のとき (1) \bar{z} (2) $-\bar{z}$ (3) $\frac{z + \bar{z}}{2}$ (4) $\frac{z - \bar{z}}{2}$ (5) $ z $ |
| 例題② $z = 3i$ のとき (1) \bar{z} $= -3i$ (2) $-\bar{z}$ $= -(-3i) = 3i$ (3) $ z $ $= 3i = 3$ | 問題② $z = 2i$ のとき (1) \bar{z} (2) $-\bar{z}$ (3) $ z $ |

3. 次の図の複素数平面上の点について、次の点を図示せよ。
Draw the following points for the following points on the complex plane.



4. 次の2点間の距離を求めよ。
Find the distance between the following two points.

| |
|---|
| 例題 $A(2 + 4i), B(10 - 2i)$ $AB = (10 - 2i) - (2 + 4i) = 8 - 6i $ $= \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$ |
| 問題 $C(-2 + 5i), D(1 + i)$ |

5. 2点 A, B と原点 O が同一直線上にあるとき、実数 x を求めよ。
Find the real number x when two points A, B and the origin O are on the same straight line.

| |
|---|
| 例題 $A(x + 3i), B(2 - i)$ $x + 3i = k(2 - i)$ から $x = 2k, 3 = -k$ よって、 $k = -3, x = 2 \times (-3) = -6$ |
| 問題 $A(x - 2i), B(2 + i)$ |

6. 次の複素数の値を求めよ。
Find the value of the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|---|--|
| $\alpha + \beta = 1 + 2i$ のとき, $\overline{\alpha + \beta}$ を求めよ。 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha + \beta} = 1 - 2i$ | $\alpha - \beta = 3 - i$ のとき, $\overline{\alpha - \beta}$ を求めよ。 |

数学III 複素数平面(応用)① 課題

()年()組()番()

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|---|
| $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ $= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ② \bar{z} $= 1 - \sqrt{3}i$ ③ $z\bar{z}$ $= (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$ $= 1^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4$ ④ $z + \bar{z}$ $= (1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i)$ $= 2$ | $z = 2 + \sqrt{5}i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ ② \bar{z} ③ $z\bar{z}$ ④ $z + \bar{z}$ |

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

| |
|---|
| 例題 $ z = 3$ かつ $ z - 4 = 3$ を満たす複素数 について、次の値を求めよ。 ① $z\bar{z}$ $z\bar{z} = z ^2 = 3^2 = 9$ ② $z + \bar{z}$ $ z - 4 ^2 = (z - 4)(\overline{z - 4}) = (z - 4)(\bar{z} - 4)$ $= z\bar{z} - 4(z + \bar{z}) + 16$ $= -4(z + \bar{z}) + 25 = 9$ $-4(z + \bar{z}) = -16$ より $z + \bar{z} = 4$ |
|---|

| |
|---|
| 問題 $ z = 2$ かつ $ z - 2 = 2$ を満たす複素数に ついて、次の値を求めよ。 ① $z\bar{z}$ ② $z + \bar{z}$ |
|---|

3. 複素数 α, β が条件を満たすとき、次の値を求めよ。
 When the complex numbers α and β satisfy the conditions,
 find the following values.

| |
|--|
| 例題 条件 $ \alpha = 3, \beta = 4, \alpha + \beta = 5$ ① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ $ \alpha + \beta ^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$ $= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$ $= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$ $= \alpha ^2 + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta ^2 = 5^2$ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 5^2 - 3^2 - 4^2 = 0$ ② $ \alpha - \beta $ $ \alpha - \beta ^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$ $= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$ $= \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$ $= \alpha ^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + \beta ^2$ $= 3^2 - 0 + 4^2 = 25$ $ \alpha - \beta \geq 0$ より $ \alpha - \beta = \sqrt{25} = 5$ |
|--|

| |
|--|
| 問題 条件 $ \alpha = 2, \beta = 3, \alpha + \beta = 4$ ① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ ② $ \alpha - \beta $ |
|--|

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|---|
| $z = 2 + \sqrt{5}i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ $= \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$ ② \bar{z} $= 2 - \sqrt{5}i$ ③ $z\bar{z}$ $= (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i)$ $= 2^2 - (\sqrt{5}i)^2 = 9$ ④ $z + \bar{z}$ $= (2 + \sqrt{5}i) + (2 - \sqrt{5}i)$ $= 4$ | $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ ② \bar{z} ③ $z\bar{z}$ ④ $z + \bar{z}$ |

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題 $|z| = 3$ かつ $z + \bar{z} = 4$ を満たす複素数 z を求めよ。

$z\bar{z} = |z|^2 = 3^2 = 9$, $z + \bar{z} = 4$ より

z, \bar{z} は二次方程式 $x^2 - 4x + 9 = 0$ の2解

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 2 \pm \sqrt{5}i$$

よって、 $z = 2 \pm \sqrt{5}i$

問題 $|z| = 2$ かつ $z + \bar{z} = 2$ を満たす複素数 z を求めよ。

3. 複素数 α, β が条件を満たすとき、次の値を求めよ。
When the complex numbers α and β satisfy the conditions, find the following values.

例題 条件 $|\alpha| = 2, |\beta| = 3, |\alpha - \beta| = 4$

① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$$

$$= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$$

$$= \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$$

$$= |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2 = 4^2$$

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2^2 + 3^2 - 4^2 = -3$$

② $|\alpha + \beta|$

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$$

$$= |\alpha|^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2$$

$$= 2^2 - 3 + 3^2 = 10$$

$|\alpha + \beta| \geq 0$ より $|\alpha + \beta| = \sqrt{10}$

問題 条件 $|\alpha| = 3, |\beta| = 4, |\alpha - \beta| = 5$

① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

② $|\alpha + \beta|$

1. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

| 例題 | 問題 |
|--|--|
| $z = \sqrt{3} - i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ ② \bar{z} $= \sqrt{3} + i$ ③ $z\bar{z}$ $= (\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)$ $= (\sqrt{3})^2 - i^2 = 4$ ④ $z + \bar{z}$ $= (\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} + i)$ $= 2\sqrt{3}$ | $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ のとき、 次の値を求めよ。 ① $ z $ ② \bar{z} ③ $z\bar{z}$ ④ $z + \bar{z}$ |

2. 次の複素数について答えよ。Answer the following complex number.

例題 $|z| = 2$ かつ $z + \bar{z} = 2\sqrt{3}$ を満たす複素数 z を求めよ。

$z\bar{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$, $z + \bar{z} = 2\sqrt{3}$ より

z, \bar{z} は二次方程式 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ の2解

$$x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$$

よって、 $z = \sqrt{3} \pm i$

問題 $|z| = 2$ かつ $z + \bar{z} = 2\sqrt{2}$ を満たす複素数 z を求めよ。

3. 複素数 α, β が条件を満たすとき、次の値を求めよ。
When the complex numbers α and β satisfy the conditions, find the following values.

例題 条件 $|\alpha| = 4, |\beta| = 5, |\alpha - \beta| = 6$

① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta})$$

$$= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$$

$$= \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$$

$$= |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\beta|^2$$

$$= 4^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + 5^2 = 6^2$$

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 4^2 + 5^2 - 6^2 = 5$$

② $|\alpha + \beta|$

$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$$

$$= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

$$= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$$

$$= |\alpha|^2 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2$$

$$= 4^2 + 5 + 5^2 = 46$$

$|\alpha + \beta| \geq 0$ より $|\alpha + \beta| = \sqrt{46}$

問題 条件 $|\alpha| = 5, |\beta| = 4, |\alpha - \beta| = 3$

① $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$

② $|\alpha + \beta|$