

1. 次の方程式の負の実数解の個数を求めよ。
Find the number of negative real solutions to the following equation.

例題 $x^3-3x^2-9x+1=0$ の負の解の個数を求めよ。

$y = x^3-3x^2-9x+1$ とおく。

$y' = 3x^2-6x-9 = 3(x+1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると、 $x = -1, 3$

| | | | | | | | |
|------|-----|------|-----|-----|-----|-------|-----|
| x | ... | -1 | ... | 0 | ... | 3 | ... |
| y' | + | 0 | - | | + | 0 | + |
| y | ↗ | 6 | ↘ | 1 | ↗ | -26 | ↗ |

グラフは x 軸と $x < -1$, $0 < x < 3$, $3 < x$ で交わる。
解の個数は 3 で、負の解の個数は 1 である。

問題 $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ の負の解の個数を求めよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

2. 次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality.

例題 $x \geq 0$ のとき、 $x^3 + 2 \geq 3x$ を証明せよ。

$x^3 + 2 \geq 3x$ より、 $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ を示す。

$y = x^3 - 3x + 2$ とおく。

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると、 $x = -1, 1$

| | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | ... | 1 | ... |
| y' | | - | 0 | + |
| y | 2 | ↘ | 0 | ↗ |

$x \geq 0$ のとき、グラフは $x = 1$ のとき最小値 0

したがって、 $y \geq 0$ であるから $x^3 + 2 \geq 3x$

等号は $x = 1$ のときである。

問題 $x \geq 0$ のとき、 $2x^3 + 1 \geq 3x^2$ を証明せよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

1. 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。
Find the number of different real solutions to the following equation.

例題

$x^3 - 3x^2 - 9x = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$y = x^3 - 3x^2 - 9x$ とおく。
 $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
 $y' = 0$ とすると、 $x = -1, 3$

| | | | | | |
|------|-----|------|-----|-------|-----|
| x | ... | -1 | ... | 3 | ... |
| y' | + | 0 | - | 0 | + |
| y | ↗ | 0 | ↘ | -32 | ↗ |

グラフは $x = -1$ で極大値 0 をとり、
 $x = 3$ で極小値 -32 をとる。
このグラフと $y = a$ の共有点の個数が方程式の異なる実数解の個数と一致する。

$-32 < a < 0$ のとき3個の共有点をもつ。
 $a = -32, 0$ のとき2個の共有点をもつ。
 $a < -32, a > 0$ のとき1個の共有点をもつ。

問題

$2x^3 - 9x^2 = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

2. 次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality.

例題

$x > 0$ のとき、 $4x^3 > 3x^2 - 1$ を証明せよ。

$4x^3 > 3x^2 - 1$, $4x^3 - 3x^2 + 1 > 0$ を示す。
 $y = 4x^3 - 3x^2 + 1$ とおく。
 $y' = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$
 $y' = 0$ とすると、 $x = 0, \frac{1}{2}$

| | | | | |
|------|-----|-----|---------------|-----|
| x | 0 | ... | $\frac{1}{2}$ | ... |
| y' | 0 | - | | + |
| y | 1 | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↗ |

$x > 0$ のとき、グラフは $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$
したがって、 $y > 0$ であるから
 $x > 0$ のとき、 $4x^3 > 3x^2 - 1$

問題

$x > 0$ のとき、 $2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 > 0$ を証明せよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

1. 次のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ。

Find the range of values of the constant a so that the following graph intersects the x-axis at three different points.

例題 関数 $y = x^3 - 6x + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ。

$y = x^3 - 6x$ とおく。

$y' = 3x^2 - 6 = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$y' = 0$ とすると, $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

| | | | | | |
|------|-----|-------------|-----|--------------|-----|
| x | ... | $-\sqrt{2}$ | ... | $\sqrt{2}$ | ... |
| y' | + | 0 | - | 0 | + |
| y | ↗ | $4\sqrt{2}$ | ↘ | $-4\sqrt{2}$ | ↗ |

グラフは $x = -\sqrt{2}$ で極大値 $4\sqrt{2}$ をとり,
 $x = \sqrt{2}$ で極小値 $-4\sqrt{2}$ をとる。

このグラフと $y = -a$ の共有点の個数が関数と x 軸との異なる実数解の個数と一致する。

$-4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$ のとき, x 軸と 3 点で交わる。

問題 関数 $y = x^3 - 6x^2 + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

2. 次の不等式を証明せよ。

Prove the following inequality.

例題 $x > 0$ のとき, $x^3 + 5 > 3x^2$ を証明せよ。

$x^3 + 4 > 3x^2, x^3 - 3x^2 + 5 > 0$ を示す。

$y = x^3 - 3x^2 + 5$ とおく。

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0$ とすると, $x = 0, 2$

| | | | | |
|------|---|-----|---|-----|
| x | 0 | ... | 2 | ... |
| y' | | - | 0 | + |
| y | 5 | ↘ | 1 | ↗ |

$x > 0$ のとき, グラフは $x = 2$ のとき最小値 1

したがって, $y > 0$ であるから

$x > 0$ のとき, $x^3 + 5 > 3x^2$

問題 $3x^4 + 1 \geq 4x^3$ を証明せよ。

| | |
|------|--|
| x | |
| y' | |
| y | |

