数学Ⅱ　方程式・不等式への応用　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　)

1．次の方程式の負の実数解の個数を求めよ。
Find the number of negative real solutions to the following equation.

例題　$x^3-3x^2-9x+1=0$ の負の解の個数を求めよ。

$y=x^3-3x^2-9x+1$ とおく。

$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると，$x=-1, 3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
y	↗	6	↘	1	↗	-26	↗

グラフは x 軸と $x<-1$, $0<x<3$, $3<x$ で交わる。

解の個数は 3 で，負の解の個数は 1 である。

問題　$x^3+2x^2+x+1=0$ の負の解の個数を求めよ。

x	
y'	
y	

2．次の不等式を証明せよ。
Prove the following inequality.

例題　$x\geqq 0$ のとき，$x^3+2\geqq 3x$ を証明せよ。

$x^3+2\geqq 3x$ より，$x^3-3x+2\geqq 0$ を示す。

$y=x^3-3x+2$ とおく。

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x=-1, 1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	2	↘	0	↗

$x\geqq 0$のとき，グラフは $x=1$ のとき最小値 0

したがって，$y\geqq 0$ であるから $x^3+2\geqq 3x$

等号は $x=1$のときである。

問題　$x\geqq 0$ のとき，$2x^3+1\geqq 3x^2$ を証明せよ。

x	
y'	
y	

数学Ⅱ　方程式・不等式への応用　2　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

例題　$x^3 - 3x^2 - 9x = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$y = x^3 - 3x^2 - 9x$ とおく。

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$

$y' = 0$ とすると, $x = -1$, 3

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

グラフは $x = -1$ で 極大値 0 をとり,

$x = 3$ で極小値 -32 をとる。

このグラフと $y = a$ の共有点の個数が方程式の異なる実数解の個数と一致する。

$-32 < a < 0$ 　のとき 3 個の共有点をもつ。

$a = -32$, 0 　のとき 2 個の共有点をもつ。

$a < -32$, $a > 0$ のとき 1 個の共有点をもつ。

問題　$2x^3 - 9x^2 = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

x	
y'	
y	

2．次の不等式を証明せよ。

例題　$x > 0$ のとき，$4x^3 > 3x^2 - 1$ を証明せよ。

$4x^3 > 3x^2 - 1$ ，$4x^3 - 3x^2 + 1 > 0$ を示す。

$y = 4x^3 - 3x^2 + 1$ とおく。

$y' = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$

$y' = 0$ とすると, $x = 0$, $\frac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	0	$-$		$+$
y	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗

$x > 0$ のとき，グラフは $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$

したがって，$y > 0$ であるから

$x > 0$ のとき，$4x^3 > 3x^2 - 1$

問題　$x > 0$ のとき，$2x^3 + 3x^2 - 12x + 8 > 0$ を証明せよ。

x	
y'	
y	

数学Ⅱ　方程式・不等式への応用　3　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ

例題　関数 $y = x^3 - 6x + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ。

$y = x^3 - 6x$ とおく。

$y' = 3x^2 - 6 = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$y' = 0$ とすると, $x = -\sqrt{2}$ ， $\sqrt{2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

グラフは $x = -\sqrt{2}$ で極大値 $4\sqrt{2}$ をとり，
$x = \sqrt{2}$ で極小値 $-4\sqrt{2}$ をとる。

このグラフと $y = -a$ の共有点の個数が関数と x 軸との異なる実数解の個数と一致する。

$-4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$ のとき, x 軸と 3 点で交わる。

問題　関数 $y = x^3 - 6x^2 + a$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるように定数 a の値の範囲を求めよ。

x	
y'	
y	

2. 次の不等式を証明せよ。

例題　$x > 0$ のとき，$x^3 + 5 > 3x^2$ を証明せよ。

$x^3 + 4 > 3x^2$ ，$x^3 - 3x^2 + 5 > 0$ を示す。

$y = x^3 - 3x^2 + 5$ とおく。

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0$ とすると, $x = 0, 2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	5	↘	1	↗

$x > 0$ のとき，グラフは $x = 2$ のとき最小値 1

したがって，$y > 0$ であるから

$x > 0$ のとき，$x^3 + 5 > 3x^2$

問題　$3x^4 + 1 \geqq 4x^3$ を証明せよ。

x	
y'	
y	